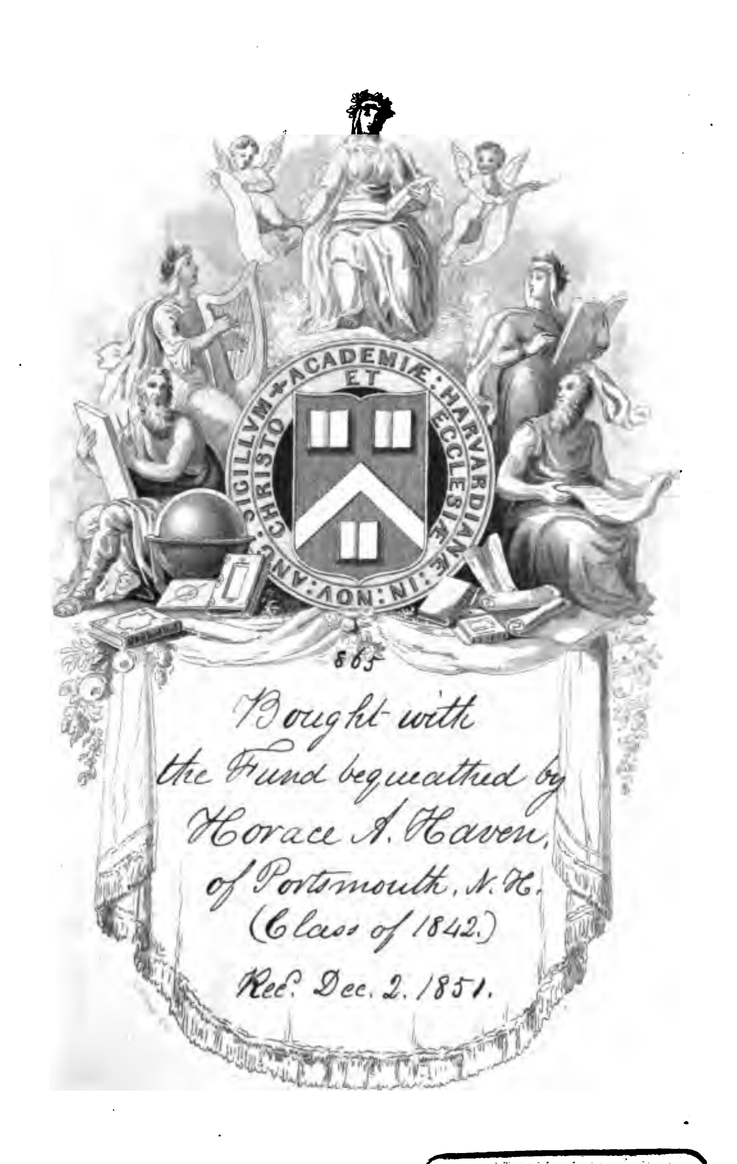

SIGILLVM ACADEMIÆ HARVARDIANÆ IN NOV: ANG: CHRISTO ET ECCLESIÆ
865
Bought with
the Fund bequeathed by
Horace A. Haven,
of Portsmouth, N. H.
(Class of 1842.)
Rec. Dec. 2. 1851.

865

Handbuch
der
Differenzial-
und
Integralrechnung

von

Dr. Oskar Schlömilch,
ausserordentlichem Professor an der Universität zu Jena.

Erster Theil.
Differenzialrechnung.

Mit zwei Kupfertafeln.

Greifswald,
Verlag von Ferd. Otte.

1847.

Den Herren

C. G. J. Jacobi

und

G. Lejeune Dirichlet

Professoren an der Universität zu Berlin, Mitgliedern der Königlichen Akademie der Wissenschaften etc. etc.

in

dankbarer Verehrung

gewidmet.

Vorrede.

Wenn man einem Mathematiker gewöhnlichen Schlages die Forderung stellt, mit kurzen Worten den Zweck der höheren Analysis zu bezeichnen und die Bedeutung zu charakterisiren, welche dieser Calcül für unsere Erkenntniss überhaupt gewinnt, so erhält man in der Regel eine Antwort, als hätte man einen Freimaurer gefragt, was die Maurerei sei. Die ganze Auskunft besteht nämlich in beiden Fällen darin, dass man nach einigen unbestimmten Redensarten ermahnt wird, sich in die Geheimnisse dieser Künste bis zu einem gewissen Grade einweihen zu lassen, weil vorher das Wozu nur sehr schwer deutlich gemacht werden könne. Nicht geringe Schuld an dieser nichtssagenden Rede trägt wenigstens in der Mathematik (ob auch in der Maurerei, weiss ich nicht) die Vielheit der Systeme, welche geschichtlich hervorgetreten sind, und unter denen es in der That solche giebt, die ganz eigens zur Ver-

schleierung des sehr einfachen Wesens der Differenzial- und Integralrechnung aufgestellt zu sein scheinen. Es ist diese Thatsache um so schwerer und vielleicht nur aus der dem Deutschen angeborenen Systematisirsucht erklärbar, als es eine ganz leichte rein empirische Methode giebt, um den Sinn der höheren Analysis zu erkennen. Betrachtet man nämlich die erste beste Reihe von Aufgaben irgend welcher Art und gruppirt sie nach der sehr natürlichen Unterscheidung, ob ihre Lösungen den höheren Calcül nothwendig erfordern oder nicht, so bedarf es nur geringer Beobachtungsgabe, um sich zu versichern, dass alle diejenigen Aufgaben in das Gebiet des Elementaren fallen, worin die zu betrachtenden Grössen entweder als schlechthin unveränderlich oder, falls sie Aenderungen unterworfen sind, als aus diskreten Theilen zusammengesetzt angesehen werden, dass sich hingegen die Analysis des Unendlichen da mit gebieterischer Nothwendigkeit aufdrängt, wo stetig veränderliche Grössen in den Kreis der Betrachtungen gezogen werden. Will man Beispiele und Belege hierzu, so braucht man nur auf solche Probleme der Geometrie hinauszusehen, in welchen einerseits der Zusammenhang zwischen den Bestandtheilen einer aus geraden und gebrochenen Linien construirten Figur oder andererseits Beziehungen zwischen geraden und krummen Linien gesucht werden; hier hat man schon den Un-

terschied; in der gebrochenen Linie — und jede aus Geraden bestehende Figur kann als solche gelten — geschehen die Richtungsveränderungen sprungweis und das Ganze besteht aus diskreten Theilen, die Curve dagegen ändert in jedem Punkte oder stetig ihre Richtung. So scharf diese Gränze ist, so leicht überschrcitet man sie übrigens auch, ohne es zu bemerken. Sehen wir z. B. in einer algebraischen Gleichung die mit einem der letzten Buchstaben des Alphabets bezeichnete Grösse als blose Unbekannte an, so stehen wir noch im Bereiche des Diskreten, lassen wir aber die Unbekannte zu einer Unbestimmten, d. h. zu einer willkührlich veränderlichen Grösse werden und fragen etwa, bis zu welcher Stelle der ganze Ausdruck wächst, dann wieder abnimmt u. s. w., so kommen wir schon auf unausgesetzte Aenderungen und hiermit in das Gebiet des Stetigen. So werden wir durch rein empirische Beobachtung a posteriori zu einem Resultate geführt, das sich auch a priori ableiten lässt, wenn man philosophisch eine Orientirung des Grössenbereiches überhaupt unternimmt, was weiter auseinanderzusetzen hier nicht meine Absicht sein kann. Haben wir uns nun auf diese Weise überzeugt, dass der Zweck der höheren Analysis kein anderer ist, als die Betrachtung stetig veränderlicher Grössen, so wird es sich blos noch um die Mittel handeln, dergleichen gewissermassen im Zustande der Flüs-

sigkeit befindliche Wesen so anzufassen, dass sie nach bestimmten Regeln behandelt werden können, ohne ihre charakteristische Eigenthümlichkeit einzubüssen. Hier giebt es nun eine doppelte Schwierigkeit: eine philosophische und eine mathematische, oder wenn man will, eine materielle und formelle. Die erstere liegt in der Begreiflichkeit des Stetigen überhaupt; rein anschaulich werden uns die continuirlichen Grössen gegeben, wir finden sie vor als einen der Bestandtheile unserer Anschauung nach den Formen des Raumes und der Zeit, und wenn wir daher auch wissen, dass ein Continuum möglich ist, so bleibt doch noch die Frage: wie ist ein solches möglich. Die zweite Schwierigkeit betrifft die Bearbeitung des vorhandenen Materiales nach den Regeln der Rechnung mit diskreten Grössen, und hier steht die Frage: in wie weit lassen sich die Operationen, welche zur Verknüpfung diskreter Grössen dienen, auf stetig veränderliche Grössen ausdehnen? Der Mathematiker befindet sich, wenn er seine Sphäre nicht verkennen will, bei diesen zwei Schwierigkeiten in einem sehr glücklichen Falle; die erste nämlich geht ihn gar nichts an; so wenig der Geometer die Frage stellt, was ist der Raum, eben so wenig braucht der Analytiker sich um die innere Natur des Stetigen zu bekümmern; genug für ihn, dass die Existenz desselben, gerade wie jene des Raumes, eine unmittelbare und unbe-

zweifelte Thatsache der Selbstbeobachtung ist. Die zweite Schwierigkeit dagegen darf der Mathematiker nicht von der Hand weisen, da sie recht eigentlich in sein Fach gehört; aber er besiegt sie auch sehr leicht, indem er sich den Begriff der Gränze bildet, gewissermassen die Brücke, welche aus dem Gebiete des Diskreten in das des Stetigen überführt; die genauere Nachweisung hiervon giebt die zweite Hälfte der Einleitung S. 2—8, die auf weiter kein Verdienst, als das einer Uebersetzung Newton'scher Betrachtungen in die jetzige Sprache der Wissenschaft Anspruch macht. Die Verkennung der philosophischen und mathematischen Rechte an den Begriff der Stetigkeit hat übrigens einige Confusion in die Bearbeitung der höheren Analysis gebracht; nur eine lächerliche Furcht vor jenem Begriffe war es bei Lagrange, Arbogast und einigen untergeordneten Geistern, die allen Forderungen nach natürlichem und heuristischem Gedankengange zum Trotz die ganze Lehre auf den Kopf stellen und sie zu einer blosen Ableitungsrechnung werden liess, welche dem Spiele eines müssigen Kopfes ähnlicher sah, als einer nothwendigen Entwickelungsstufe in der fortlaufenden Ausbildung der Grössenwissenschaft.

Man wird es nach diesen Bemerkungen sehr natürlich finden, wenn ich die schon mehrmals ausgesprochene Meinung, dass man die höhere Analysis gleich auf die elemen-

taren Lehren der Buchstabenrechnung und ebenen Trigonometrie folgen lassen könnte, nicht nur theile, sondern diesen Weg sogar für den einzig wissenschaftlichen halte, und ich habe daher das vorliegende Werk mit einer Einleitung versehen, welche da anhebt, wo der gewöhnliche Schulunterricht aufhört und alles Das enthält, was man später braucht und nicht gerade voraussetzen darf. Dem übrigen Inhalte habe ich die möglichste Vollständigkeit zu geben gesucht und ausserdem manches Neue hinzugefügt, was der sachkundige Leser von selbst finden wird.

Besonderen Dank endlich schulde ich noch Herrn Prof. Grunert für die Uebernahme der ersten Correktur, dem Herrn Verleger für die nette Ausstattung des Buches und Herrn Mädel II. in Weimar für die sorgfältige Ausführung der Figurentafeln.

Jena im November 1846.

Schlömilch.

Inhalt.

Cap. IX. Das Theorem von Lagrange.

Cap. X. Anwendungen auf Geometrie.

Verbesserungen.

Seite	Zeile			
VII	10	v. u.	statt	$(1+\frac{1}{m+z})^{m+}$ lies $(1+\frac{1}{m+z})^{m+2}$
X	1	v. o.	„	$(1+\frac{1}{\mu}^{\mu}$ lies $(1+\frac{1}{\mu})^{\mu}$
12	9	v. u.	„	$x\frac{1}{2}g^2$ lies $\frac{1}{2}gx^2$
15	5	v. u.	„	der Worte: „die selbst.....war“ muss es heissen: „wobei $F(x)$ stetig und endlich bleibt, wenn $f(x)$ es ist.“
17	8	v. o.	„	$\varDelta .x$ lies $\varDelta_x$
19	11	v. o.	„	(Fx) lies $F(x)$
21	9	v. u.	„	$\Psi(x+\varDelta x)$ lies $\psi(x+\varDelta x)$
81	8	v. o.	„	$\mu_{s\,\|\,1}$ lies μ_{s+1}
91	8	v. o.	„	$(-1)^n$ lies $(-1)^{n-1}$, ebenso in Formel (13) das.
173	4	v. u.	„	$F(a+$ lies $F(a+h)$

Einleitung.

Alle in der Mathematik vorkommenden höheren Rechnungsweisen unterscheiden sich von den elementaren Betrachtungen hauptsächlich durch das Gepräge grosser Allgemeinheit, welches ihnen eigenthümlich ist. Diese ausgezeichnete Eigenschaft verdankt man der Einführung eines einzigen Begriffes, welcher selbst den höchsten Grad der Allgemeinheit enthält, den man einer mathematischen Abstraktion geben kann; es ist diess der Begriff der **Funktion einer veränderlichen Grösse**. Sind nämlich zwei der Veränderung fähige Grössen so an einander geknüpft, dass die Aenderung der einen nothwendig eine Aenderung der anderen nach sich zieht, so nennt man die eine eine Funktion der anderen. Bezeichnen wir also z. B. eine ganz willkührlich veränderliche Grösse mit x, so sind die Ausdrücke wie x^2, 3^x, $\log x$, $\sin x$ etc. sämmtlich Funktionen von x, die sich hier nur dadurch unterscheiden, dass jede von ihnen x in anderer Weise enthält, oder anderer **Natur** ist. Setzt man eine solche Funktion einer anderen Grösse gleich, etwa $\log x = y$, so hat man jetzt zwei Veränderliche, x und y, von denen die erste die **unabhängige**, die zweite die **abhängige Variable** heisst, weil die Aenderungen der letzteren durch die Natur der Funktion selbst von denen der ersteren abhängen. Im Allgemeinen bezeichnet man die Funktionen durch die Buchstaben F, f, φ, ψ und ähnliche, denen man die Veränderliche, in Parenthesen eingeschlossen, beisetzt, also mit $F(x)$, $f(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ etc. Eine Gleichung wie $y = f(x)$ bedeutet demnach: die abhängige Variable y ist durch irgend welche Rechnungsoperationen so an die unabhängige Variable geknüpft, dass sie sich mit jener gleichzeitig ändert.

Es giebt auch Funktionen zweier oder mehrerer Variablen; in der Gleichung $y = ax^3 + cz^2$ z. B. hängen die Aenderungen des y von denen der x und z gleichzeitig ab; man bezeichnet diess mit $y = f(x, z)$

oder $y = \psi(x, z)$. Ebenso würden die Symbole $y = F(x, z, t)$, $y = \varphi(x, z, t, v)$ Funktionen mehrerer Variablen andeuten.

Mit Hülfe der analytischen Geometrie kann man sich sehr leicht ein Bild jeder Funktion einer oder zweier Variablen verschaffen. Denkt man sich nämlich in einer Gleichung wie $y = f(x)$ die unabhängige Variable x als Abscisse, die abhängige y als Ordinate und den ganzen Ausdruck $y = f(x)$ als Gleichung einer Curve, so giebt die letztere unmittelbar ein anschauliches Bild von dem Verlaufe der Funktion $f(x)$. So würde z. B. $y = ax^2$ eine Parabel bedeuten, wobei der Scheitel der Anfangspunkt der rechtwinklichen Coordinaten und die Achse der Parabel die Ordinatenachse ist, ebenso $y = \frac{a}{x}$ eine gleichseitige Hyperbel, wenn die Asymptoten zu Coordinatenachsen genommen werden. Um Funktionen zweier Veränderlichen zu construiren, muss man in den Raum hinausgehen und sich x, y, z als räumliche Coordinaten denken; dann bedeutet eine Gleichung wie $y = f(x, z)$ geometrisch eine Fläche, z. B. $y = \sqrt{r^2 - x^2 - z^2}$ eine Kugel mit dem Halbmesser r.

Da über die Werthe der unabhängigen Variablen ganz und gar keine Bestimmung gemacht ist, so steht es uns auch frei, dieselbe sich so ändern zu lassen, dass sie von irgend einer Stelle an entweder beständig ins Unendliche hinaus wächst, z. B. für $x = 1, 2, 3, 4$ u. s. f., oder unausgesetzt verringert wird, wie z. B. wenn man $x = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ etc. nimmt. Hierdurch wird offenbar auch eine beständige Aenderung in den Werthen der abhängigen Variablen hervorgerufen, die sich zwar wegen der grossen Allgemeinheit im Begriffe der Funktion geradezu nicht angeben lässt, für welche wir aber wenigstens drei Fälle unterscheiden können. Entweder nämlich durchlaufen die Werthe der Funktion das ganze unendliche Gebiet der Zahlen oder ein abgeschlossenes Stück desselben, oder sie nähern sich einer bestimmten angebbaren Grösse als G r ä n z e. Als Beispiele für diese drei Fälle betrachten wir die Funktionen

$$\varphi(x) = x^2, \ \psi(x) = \cos x, \ f(x) = \frac{x}{a + x}$$

für ins Unendliche wachsende x. Die erste nimmt offenbar mit x gleichzeitig unausgesetzt zu und durchläuft das ganze Gebiet der positiven Zahlen; die zweite oszillirt beständig zwischen den Gränzen $+1$ und -1 hin und her, durchläuft also immer fort gewissermassen im

Kreise herum ein bestimmtes Intervall; die dritte endlich nähert sich einer bestimmten Gränze. Denn es ist auch

$$f(x) = 1 - \frac{a}{a+x},$$

und wenn nun x ins Unendliche wächst, so kann man offenbar $\frac{a}{a+x}$ kleiner als jede noch so kleine angebbare Zahl machen; es nähert sich folglich $\frac{a}{a+x}$ der Gränze Null und mithin $f(x)$ der Gränze Eins. Die Gränze selbst wird zwar nie erreicht, aber man kann ihr $f(x)$ so nahe bringen, als man nur will. Man bezeichnet einen solchen Gränzwerth durch die vorgeschriebene Sylbe Lim, also oben

$$\text{Lim}\,\frac{x}{a+x} = r, \text{ für unendlich wachsende } x.$$

Gränzwerthe für unausgesetzt wachsende od. abnehmende Variable lassen sich übrigens leicht auf einander reduziren. Bezeichnet nämlich ω eine beständig wachsende, δ eine beständig abnehmende Grösse, so kann man $\frac{1}{\omega} = \delta$ setzen, weil jetzt δ continuirlich abnimmt, so wie ω wächst. Aus dieser Gleichung folgt aber $\omega = \frac{1}{\delta}$ und durch diese Substitution verwandelt sich die Gränzbestimmung für wachsende Werthe in eine für abnehmende Werthe.

Wir wollen uns nun mit der Aufsuchung einiger Gränzwerthe beschäftigen, welche für unsere weiteren Untersuchungen von der grössten Wichtigkeit sind, da die Operation des Gränzenüberganges ein Hauptmoment des höheren Calculs ist, wie sich aus der zweiten Hälfte dieser Einleitung in die Differenzialrechnung bald ergeben wird.

Eine der einfachsten Aufgaben dieser Art ist: die Gränze des Quotienten $\frac{\sin\delta}{\delta}$ zu finden, wenn wir δ unausgesetzt abnehmen oder, was das Nämliche ist, sich der Gränze Null nähern lassen. Man gelangt zu der Lösung dieses Problemes leicht durch folgende Betrachtungen. Bedeutet δ einen Bogen $< \frac{\pi}{2}$, so ist $\delta > \sin\delta$, folglich $\frac{\sin\delta}{\delta} < 1$, ferner $\tan\delta > \delta$, folglich, wenn man mit beiden in $\sin\delta$ dividirt,

$\frac{\sin\delta}{\tan\delta} < \frac{\sin\delta}{\delta}$ oder $\cos\delta < \frac{\sin\delta}{\delta}$. Wir haben so zwei Grössen gefunden, zwischen denen der fragliche Quotient liegt; es ist nämlich

$$1 > \frac{\sin\delta}{\delta} > \cos\delta.$$

Lassen wir jetzt δ der Gränze Null zueilen, so rücken die Grössen 1 und $\cos\delta$, zwischen denen unser Quotient enthalten ist, immer näher an einander und fallen für $\delta = 0$ zusammen; da aber der Quotient nicht ausserhalb derselben liegen kann, so muss er jetzt ihrem gemeinschaftlichen Werthe $1 = \cos 0$ gleich sein. Wir haben demnach die wichtige Gleichung

$$\mathrm{Lim}\,\frac{\sin\delta}{\delta} = 1. \qquad (1)$$

Wir können daraus gleich noch eine zweite ableiten, welche so lautet:

$$\mathrm{Lim}\,\frac{\tan\delta}{\delta} = 1. \qquad (2)$$

Denn es ist

$$\frac{\tan\delta}{\delta} = \frac{\sin\delta}{\delta}\cdot\frac{1}{\cos\delta},$$

und da sich hier für abnehmende δ jeder der Quotienten $\frac{\sin\delta}{\delta}$ und $\frac{1}{\cos\delta}$ der Einheit nähert, so folgt unmittelbar die Richtigkeit des genannten Theorems.

Man überzeugt sich ebenso leicht auch von der Gültigkeit der olgenden Gleichungen:

$$\mathrm{Lim}\,\frac{\delta}{\sin\delta} = 1 \text{ und } \mathrm{Lim}\,\frac{\delta}{\tan\delta} = 1,$$

die man auch noch unter einer anderen Form darstellen kann. Setzt man nämlich in der ersten $\sin\delta = \delta'$, so folgt $\delta = \mathrm{Arcsin}\,\delta'$, wobei unter $\mathrm{Arcsin}\,\delta'$ der kleinste unter allen zu einem Sinus $= \delta'$ gehörenden Bögen verstanden wird. Da derselbe mit δ gleichzeitig bis zur Gränze Null abnimmt, so ist jetzt für unausgesetzt abnehmende δ'

$$\mathrm{Lim}\,\frac{\mathrm{Arcsin}\,\delta'}{\delta'} = 1. \qquad (3)$$

Nimmt man ebenso in der zweiten der obigen Gleichuugen $\tan\delta = \delta'$, also $\delta = \mathrm{Arctan}\,\delta'$, wo wieder $\mathrm{Arctan}\,\delta'$ den kleinsten aller zu einer Tangente $= \delta'$ gehörigen Bögen bezeichnet, so ist für unbegränzt abnehmende δ'

$$\text{Lim}\ \frac{\text{Arctan}\,\delta'}{\delta'} = 1. \qquad (4)$$

Die beiden so gewonnenen Sätze (3) und (4) bilden die Umkehrungen der unter (1) nnd (2) verzeichneten.

Ein sehr fruchtbares Theorem, welches ebenfalls unter die Betrachtungen über die Gränzen der Funktionen gehört, ist das folgende: „wenn die Grösse μ nach irgend einem Gesetze ins Unendliche wächst, so nähert sich der Ausdruck

$$(1+\frac{1}{\mu})^{\mu}$$

einer festen Gränze, welche zwischen den Zahlen 2 und 3 liegt."

Sei zuerst μ eine ganze Zahl $=m$, so lässt sich leicht zeigen, dass der fragliche Ausdruck zwar immer zunimmt, wenn m wächst, dass er aber trotz seines beständigen Wachsthumes nicht einmal die Zahl 3 erreichen kann. Denn es ist nach dem Binomialtheoreme, welches wir hier bloss für ganze positive Exponenten in Anspruch nehmen*),

---

*) Dasselbe lässt sich sehr einfach auf folgende Art beweisen. Es sei

$$S_m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + \ldots,$$

wo S_m die als unbekannt vorausgesetzte Summe der Reihe rechts bezeichnet. Ebenso ist analog

$$S_{m-1} = 1 + \frac{m-1}{1}x + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2}x^2 + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3}x^3 + \ldots$$

und durch Subtraktion

$$S_m - S_{m-1} = x + \frac{m-1}{1}x^2 + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2}x^3 + \ldots$$

d. i.

$$S_m - S_{m-1} = xS_{m-1},$$

woraus

$$S_m = (1+x)S_{m-1}$$

folgt. Setzt man der Reihe nach m, $m-1$, $m-2$, ...2, 1 für m, so erhält man die m Gleichungen

$$\begin{aligned} S_m &= (1+x)S_{m-1} \\ S_{m-1} &= (1+x)S_{m-2} \\ S_{m-2} &= (1+x)S_{m-3} \\ &\cdots\cdots\cdots \\ S_2 &= (1+x)S_1 \\ S_1 &= (1+x)S_0. \end{aligned}$$

$$(1+\frac{1}{m})^m = 1 + \frac{m}{1}\cdot\frac{1}{m} + \frac{m(m-1)}{1.2}\left(\frac{1}{m}\right)^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\left(\frac{1}{m}\right)^3 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-\overline{m-1})}{1.2.3\ldots\ldots m}\left(\frac{1}{m}\right)^m.$$

wofür auch geschrieben werden kann:

$$(1+\frac{1}{m})^m = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1-\frac{1}{m}}{1.2} + \frac{(1-\frac{1}{m})(1-\frac{2}{m})}{1.2.3} + \ldots$$
$$+ \frac{(1-\frac{1}{m})(1-\frac{2}{m})\ldots\ldots(1-\frac{m-1}{m})}{1.2.3\ldots\ldots m}. \qquad (5)$$

Ebenso würde sein

$$(1+\frac{1}{m+1})^{m+1} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1-\frac{1}{m+1}}{1.2} + \frac{(1-\frac{1}{m+1})(1-\frac{2}{m+1})}{1.2.3} + \ldots$$
$$\frac{(1-\frac{1}{m+1})(1-\frac{2}{m+1})\ldots\ldots(1-\frac{m}{m+1})}{1.2.3\ldots\ldots(m+1)}. \qquad (6)$$

Vergleichen wir zwei Glieder gleicher Nummer aus beiden Reihen etwa die $k$ten Glieder, so ist das $k$te Glied der ersten Reihe:

$$\frac{(1-\frac{1}{m})(1-\frac{2}{m})(1-\frac{3}{m})\ldots\ldots(1-\frac{k-2}{m})}{1.2.3\ldots\ldots(k-1)}$$

offenbar kleiner als das $k$te Glied der zweiten Reihe

$$\frac{(1-\frac{1}{m+1})(1-\frac{2}{m+1})(1-\frac{3}{m+1})\ldots\ldots(1-\frac{k-2}{m+1})}{1.2.3\ldots\ldots(k-1)},$$

weil wegen $m < m+1$

Multiplizirt man diese m Gleichungen mit einander und bemerkt, dass der ursprünglichen Bedeutung von S_m nach $S_0 = 1$ ist, so folgt

$$S_1\, S_2\, S_3 \ldots S_{m-1}\, S_m = (1+x)^m\, S_1\, S_2\, S_3 \ldots S_{m-1}$$

d. i.

$$S_m = (1+x)^m,$$

womit die gesuchte Summe gefunden und zugleich das Binomialtheorem für positive ganze Exponenten bewiesen ist.

$$1-\frac{1}{m}<1-\frac{1}{m+1}$$
$$1-\frac{2}{m}<1-\frac{2}{m+1}$$
$$\ldots \quad \ldots$$
$$1-\frac{k-2}{m}<1-\frac{k-2}{m+1}$$

folglich auch der Zähler dort kleiner als hier ist. Ausserdem aber, dass jedes Glied in der Reihe (5) kleiner ist, als das entsprechende in (6), enthält auch die letztere Reihe noch ein Glied mehr als die vorhergehende, folglich ist um so stärker

$$(1+\frac{1}{m})^m < (1+\frac{1}{m+1})^{m+1}.$$

Da offenbar nun wieder

$$(1+\frac{1}{m+1})^{m+1} < (1+\frac{1}{m+2})^{m+} < (1+\frac{1}{m+3})^{m+3} \ldots$$

ist, so ergiebt sich, dass der Ausdruck

$$(1+\frac{1}{m})^m$$

beständig zunimmt, wenn m wächst. Die Zunahme fängt an bei dem Werthe 2, welcher $m=1$ entspricht, aber sie geht nicht ins Unendliche fort. In der Reihe (5) nämlich sind die Grössen $\frac{1}{m}$ $\frac{2}{m}$, $\frac{3}{m}, \ldots \frac{m-1}{m}$ ächte Brüche und mithin sind es auch die Differenzen

$$1-\frac{1}{m},\ 1-\frac{2}{m},\ 1-\frac{3}{m},\ \ldots\ldots 1-\frac{m-1}{m}$$

wenigstens übersteigen sie die Einheit nicht, wie gross auch m werden möge. Daraus folgt, dass auch die Produkte

$$(1-\frac{1}{m})(1-\frac{2}{m}),\ (1-\frac{1}{m})(1-\frac{2}{m})(1-\frac{3}{m}) \text{ etc.}$$

d. h. die Zähler der Reihenglieder in (5) die Einheit nicht übersteigen können; es kann mithin der Ausdruck $(1+\frac{1}{m})^m$ nicht grösser werden, als die Summe der Reihe

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\ldots+\frac{1}{1.2.3\ldots m}, \qquad (7)$$

wenn auch m unbegränzt zunimmt. Es ist aber

$$\frac{1}{2.3} < \frac{1}{2.2} \text{ d. i. } < \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\frac{1}{2.3.4} < \frac{1}{2.2.2} \text{ d. i. } < \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

u. s. f.

folglich

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots\ldots+\frac{1}{1.2.3\ldots m}$$

$$<1+1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ldots\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1},$$

oder nach der Summenformel für die geometrische Progression

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots\ldots+\frac{1}{1.2.3\ldots m}$$

$$< 1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^m}{1-\frac{1}{2}} \text{ d. i. } < 3-\frac{1}{2^{m-1}}.$$

Weil aber der Ausdruck $(1+\frac{1}{m})^m$ nicht grösser als die Summe der Reihe (7), diese aber kleiner als $3-\frac{1}{2^{m-1}}$ ist, so folgt jetzt ganz sicher

$$(1+\frac{1}{m})^m < 3-\frac{1}{2^{m-1}} \text{ mithin auch } < 3,$$

und diess gilt, wie gross auch m sein möge. Da nun $(1+\frac{1}{m})^m$ mit m gleichzeitig immer zunimmt, gleichwohl aber immer kleiner als die Zahl 3 bleibt, so muss sich der fragliche Ausdruck einer bestimmten und zwar festen Gränze < 3 nähern, weil ein Oszilliren von $(1+\frac{1}{m})^m$ durch den Nachweis seines beständigen Wachsthums ausgeschlossen ist. Man hat für diese Gränze den besonderen Buchstaben e eingeführt, welcher in der Analysis ebenso ausschliesslich zur Bezeichnung von $\text{Lim}\,(1+\frac{1}{m})^m$ gebraucht wird, wie in der Geometrie der Buchstabe π für die Ludolphsche Zahl. Es ist übrigens vermöge der Definition von e, nämlich

$$e = \text{Lim}\,(1 + \frac{1}{m})^m \qquad (8)$$

sehr leicht einen Näherungswerth für e zu finden, indem man für m eine ziemlich grosse Zahl setzt und die Potenzirung wirklich ausführt; so erhält man z. B. für $m = 1000000$, $e = 2{,}71828$. Eine bequemere Methode für die Berechnung von e, welches, beiläufig gesagt, eine irrationale Zahl ist, werden wir später unter Anwendung der Differenzialrechnung kennen lernen, wobei sich ergiebt: $e = 2{,}7182818284590452\ldots$

Es lässt sich nun auch leicht zeigen, dass die Gränze, welcher sich der allgemeinere Ausdruck $(1 + \frac{1}{\mu})^\mu$ für nach irgend einem Gesetze ins Unendliche wachsende μ nähert, ebenfalls die Zahl e ist. Wäre nämlich μ ein ins Unendliche zunehmender Bruch (wie z. B. wenn man der Reihe nach $\mu = \sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$ etc. setzte), so giebt es doch immer zwei auf einander folgende ganze Zahlen m u. $n = m + 1$, zwischen denen in jedem Falle der Werth von μ enthalten ist. Wegen $m < \mu < n$ ist dann $\frac{1}{m} > \frac{1}{\mu} > \frac{1}{n}$, ebenso $1 + \frac{1}{m} > 1 + \frac{1}{\mu} > 1 + \frac{1}{n}$ und folglich auch

$$(1 + \frac{1}{m})^\mu > (1 + \frac{1}{\mu})^\mu > (1 + \frac{1}{n})^\mu.$$

Da aber μ zwischen m und $n = m + 1$ liegt, so können wir $\mu = m + \alpha$ und $\mu = n - \beta$ setzen, wo α und β jedenfalls ächte Brüche sind; wir haben daher auch

$$(1 + \frac{1}{m})^{m+\alpha} > (1 + \frac{1}{\mu})^\mu > (1 + \frac{1}{n})^{n-\beta}$$

oder, was offenbar das Nämliche ist,

$$\left[(1 + \frac{1}{m})^m\right]^{1 + \frac{\alpha}{m}} > (1 + \frac{1}{\mu})^\mu > \left[(1 + \frac{1}{n})^n\right]^{1 - \frac{\beta}{n}}.$$

Lassen wir nun μ ins Unendliche zunehmen, so wachsen auch m und und n über alle Gränzen hinaus und wir haben daher

$$\text{Lim}\,(1 + \frac{1}{m})^m = e,\ \text{Lim}\,(1 + \frac{1}{n})^n = e.$$

Ferner nähern sich die Exponenten $1 + \frac{\alpha}{m}$ und $1 - \frac{\beta}{m}$ der gemeinschaftlichen Gränze Eins, mithin haben die beiden Ausdrücke, zwischen denen

$(1+\frac{1}{\mu})^{\mu}$ immer liegt, den gemeinschaftlichen Gränzwerth $e^1 = e$ und folglich muss auch

$$\text{Lim}\ (1+\frac{1}{\mu})^{\mu} = e \qquad (9)$$

sein, wo nun μ irgend eine positive unausgesetzt wachsende Grösse bezeichnet. — Wäre endlich μ negativ, also der Gränzwerth von $(1-\frac{1}{\mu})^{-\mu}$ aufzusuchen, so bemerke man, dass

$$\left(1-\frac{1}{\mu}\right)^{-\mu} = \left(\frac{\mu-1}{\mu}\right)^{-\mu} = \left(\frac{\mu}{\mu-1}\right)^{\mu}$$

ist und setze jetzt $\mu = 1+\lambda$, so wird

$$\left(1-\frac{1}{\mu}\right)^{-\mu} = \left(\frac{1+\lambda}{\lambda}\right)^{1+\lambda} = \left[(1+\frac{1}{\lambda})^{\lambda}\right]^{1+\frac{1}{\lambda}}.$$

Nimmt nun μ ins Unendliche zu, so ist diess offenbar auch mit $\lambda = \mu-1$ der Fall, folgl. Lim $(1+\frac{1}{\lambda})^{\lambda} = e$ und Lim $(1+\frac{1}{\lambda}) = 1$, mithin

$$\text{Lim}\ (1-\frac{1}{\mu})^{-\mu} = e. \qquad (10)$$

Fassen wir nun die unter (8), (9) und (10) gewonnenen Resultate zusammen, so ergiebt sich für jedes nach irgend einem Gesetze ins Unendliche wachsende μ die wichtige Gleichung

$$\text{Lim}\ (1+\frac{1}{\mu})^{\mu} = e. \qquad (11)$$

Nehmen wir $\frac{1}{\mu} = \delta$ also $\mu = \frac{1}{\delta}$, so stellt sich dieselbe in folgender Form dar:

$$\text{Lim}\ (1+\delta)^{\frac{1}{\delta}} = e, \qquad (12)$$

wobei sich das Zeichen Lim auf die unausgesetzte Abnahme von δ bezieht.

Man kann hieraus auch leicht den Gränzwerth von

$$(1+a\delta)^{\frac{1}{\delta}}$$

ableiten, wenn man voraussetzt, dass sich die Grösse a während der unbegränzten Abnahme von δ nicht ändert. Man hat nämlich

$$(1+a\delta)^{\frac{1}{\delta}} = [(1+a\delta)^{\frac{1}{a\delta}}]^{a}.$$

Hier nimmt die Grösse $a\delta$ mit δ gleichzeitig bis zur Null ab, und folglich ist auch

$$\text{Lim}\,(1+a\delta)^{\frac{1}{a\delta}}=e,$$

mithin nach dem Vorigen

$$\text{Lim}\,(1+a\delta)^{\frac{1}{\delta}}=e^a. \qquad (13)$$

Grössen von der Form e^a kommen in der Analysis häufig vor und führen da den Namen Exponenzialgrössen.

Man hat die Zahl e, welche in den vorigen Untersuchungen eine so wichtige Rolle spielte, auch zur Basis eines logarithmischen Systemes gemacht, dessen Logarithmen man die natürlichen nennt und mit log nat oder einem blossen l bezeichnet Es gilt von denselben ein sehr bemerkenswerther Satz, zu dem man auf folgende Weise gelangt. Bezeichnet log den Logarithmen irgend eines Systemes, so ist offenbar

$$\frac{\log(1+\delta)}{\delta}=\log\left[(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}}\right],$$

folglich, wenn wir zur Gränze für abnehmende δ übergehen,

$$\text{Lim}\,\frac{\log(1+\delta)}{\delta}=\log e.$$

Da es für das Bestehen dieses Satzes ganz gleichgültig ist, nach welchem Gesetze δ abnimmt, wenn man es nur der Null so nahe bringen kann, als man will, so hindert nichts, $\delta=a^\varepsilon-1$ zu setzen, wo a die Basis der mit log bezeichneten Logarithmen und ε eine bis zur Null abnehmende Grösse bezeichnet. Es ist dann die einzige dem δ auferlegte Bedingung erfüllt und

$$\text{Lim}\,\frac{\varepsilon}{a^\varepsilon-1}=\log e,\ \text{bas}\ a$$

oder, wenn wir umkehren und δ für ε schreiben,

$$\text{Lim}\,\frac{a^\delta-1}{\delta}=\frac{1}{\log e},\ \text{bas}\ a.$$

Vermöge der Bedeutung von a ist aber

$$a^{\log e}=e,$$

folglich, wenn man beiderseits die natürlichen Logarithmen nimmt,

$$\log e\, la=le=1,$$

mithin

$$\frac{1}{\log e} = la$$

und jetzt nach dem Vorigen

$$\text{Lim}\,\frac{a^\delta - 1}{\delta} = la. \qquad (14)$$

Die beiden unter (13) und (14) gefundenen Gleichungen haben, abgesehen von ihrer Wichtigkeit für die Differenzialrechnung, schon an sich eine ganz eigenthümliche Bedeutung. Sie zeigen uns nämlich, dass die Operation der Gränzbestimmung zu einem Uebergangsmittel werden kann, um aus dem Bereiche der einen Funktion in den einer anderen zu gelangen. So giebt uns die Formel (13) ein Mittel an die Hand, um aus einer Potenz wie b^μ eine Exponenzialgrösse abzuleiten, indem man nur $b = 1 + a\delta$, $\mu = \frac{1}{\delta}$ zu setzen und zur Gränze für abnehmende δ überzugehen braucht; ebenso würde man nach Formel (14) aus b^μ für $b = a$, $\mu = \delta$ mit Hülfe einer Subtraktion, Division und eines Gränzenüberganges Logarithmen aus Potenzen berechnen können. Wir thun hier also einen tieferen Blick in das Gewebe der Funktionen, indem wir die Potenz als die gemeinschaftliche Quelle der Exponenzialgrössen und Logarithmen und zugleich auch die Operationen kennen lernen, durch welche der Uedergang vermittelt wird.

Die Wissenschaft ist dem allgemeinen Gedanken, welcher sich hier ausspricht, nämlich Beziehungen zwischen anscheinend ganz verschiedenen Funktionen aufzusuchen und hierdurch den Zusammenhang zwischen den letzteren aufzudecken, noch weiter nachgegangen und ist so glücklich gewesen, auch zwischen der Exponenzialgrösse und den goniometrischen Funktionen einerseits, so wie zwischen dem Logarithmus und den cyklometrischen Funktionen andererseits Relationen zu entdecken, welche die nämlichen Dienste leisten wie oben die Gleichungen (13) und (14). Das verbindende Mittelglied ist hier nicht ein Gränzenübergang, sondern das eine numerische Unmöglichkeit bedeutende Symbol $\sqrt{-1}$, und diess hat zur Folge, dass die betreffenden Relationen nicht wie jene zur numerischen Berechnung taugen; da sie aber analytisch uns sehr wichtig werden, so möge hier eine Entwickelung derselben folgen.

Bezeichnen wir die unmögliche oder, wie man auch sagt, **imaginäre** Zahl $\sqrt{-1}$ der Kürze wegen ein für allemal mit i, so dass

$$i^2 = -1,\ i^4 = +1,\ i^6 = -1, \ldots$$
$$i^3 = -i,\ i^5 = +i,\ i^7 = -i, \ldots$$

ist, und multipliziren die beiden ähnlich gebildeten Binome $\cos x + i \sin x$ und $\cos y + i \sin y$ mit einander, so ergiebt sich leicht

$$(\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y)$$
$$= \cos x \cos y - \sin x \sin y + i(\cos x \sin y + \sin x \cos y)$$

d. i. nach zwei bekannten Formeln der Goniometrie

$$(\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) = \cos(x+y) + i \sin(x+y).$$

Multipliziren wir beiderseits mit $\cos z + i \sin z$ und wenden auf der rech ten Seite das gefundene Theorem selbst wieder an, so wird

$$(\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y)(\cos z + i \sin z)$$
$$= \cos(x+y+z) + i \sin(x+y+z).$$

Beiderseitige Multiplikation mit $\cos u + i \sin u$ gäbe

$$(\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y)(\cos z + i \sin z)(\cos u + i \sin u)$$
$$= \cos(x+y+z+u) + i \sin(x+y+z+u).$$

Man übersieht leicht, wie sich dieses Verfahren beliebig weit fortsetzen liesse und dass für m willkührliche Bögen $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \ldots \Theta_m$ die Gleichung gilt

$$(\cos \Theta_1 + i \sin \Theta_1)(\cos \Theta_2 + i \sin \Theta_2) \ldots (\cos \Theta_m + i \sin \Theta_m)$$
$$= \cos(\Theta_1 + \Theta_2 + \ldots + \Theta_m) + i \sin(\Theta_1 + \Theta_2 + \ldots + \Theta_m).$$

Von diesem Satze ist hauptsächlich derjenige spezielle Fall wichtig, in welchem die Grössen $\Theta_1, \Theta_2, \ldots \Theta_m$ sämmtlich einander gleich und etwa $= \Theta$ sind; es geht dann unsere Gleichung in die folgende über

$$(\cos \Theta + i \sin \Theta)^m = \cos m\Theta + i \sin m\Theta, \qquad (15)$$

die unter dem Namen des Moivre'schen Theoremes bekannt ist.

Man kann aus demselben leicht zwei schöne Sätze ableiten, mittelst deren man $\cos m\Theta$ und $\sin m\Theta$ durch Potenzen von $\cos \Theta$ und $\sin \Theta$ ausdrücken kann. Wendet man nämlich auf die linke Seite das Binomialtheorem für ganze positive Exponenten an und berücksichtigt die oben angegebenen Werthe von i^2, i^3, i^4, i^5 etc., so findet man leicht

$$\cos m\Theta + i \sin m\Theta$$
$$= m_0 \cos^m\Theta - m_2 \cos^{m-2}\Theta \sin^2\Theta + m_4 \cos^{m-4}\Theta \sin^4\Theta - \ldots$$
$$+ i\{m_1 \cos^{m-1}\Theta \sin\Theta - m_3 \cos^{m-3}\Theta \sin^3\Theta + m_5 \cos^{m-5}\Theta \sin^5\Theta - \ldots\}$$

und hieraus durch Vergleichung *) der reellen und imaginären Partieen

$$\left.\begin{array}{c}\cos m\Theta = \\ m_0 \cos^m\Theta - m_2 \cos^{m-2}\Theta \sin^2\Theta + m_4 \cos^{m-4}\Theta \sin^4\Theta - \ldots\end{array}\right\} \quad (16)$$

$$\left.\begin{array}{c}\sin m\Theta = \\ m_1 \cos^{m-1}\Theta \sin\Theta - m_3 \cos^{m-3}\Theta \sin^3\Theta + m_5 \cos^{m-5}\Theta \sin^5\Theta - \ldots,\end{array}\right\} \quad (17)$$

wobei die erste Reihe nach geraden, die zweite nach ungeraden Potenzen von $\sin\Theta$ fortschreitet. Dividirt man beide Gleichungen durch $\cos^m\Theta$, so erhält man noch die folgenden bemerkenswerthen Resultate:

$$\frac{\cos mx}{\cos^m x} = m_0 - m_2 \tan^2 x + m_4 \tan^4 x - \ldots \quad (18)$$

$$\frac{\sin mx}{\cos^m x} = m_1 \tan x - m_3 \tan^3 x + m_5 \tan^5 x - \ldots \quad (19)$$

Eine andere nicht minder wichtige Anwendung des Moivreschen Theoremes ist die folgende. Da in no. (15) die Grösse Θ ganz beliebig ist, so steht es frei, $\Theta = \frac{x}{m}$ zu nehmen, woraus sich ergiebt

$$\left(\cos\frac{x}{m} + i \sin\frac{x}{m}\right)^m = \cos x + i \sin x$$

oder

$$\left(\cos\frac{x}{m}\right)^m \left(1 + i \tan\frac{x}{m}\right)^m = \cos x + i \sin x,$$

und wenn wir $\frac{1}{m} = \vartheta$ setzen, wo ϑ einen Bruch mit dem Zähler 1 aber beliebigen Nenner bedeutet,

$$(\cos\vartheta x)^{\frac{1}{\vartheta}}(1 + i \tan\vartheta x)^{\frac{1}{\vartheta}} = \cos x + i \sin x. \quad (20)$$

*) Aus einer Gleichung wie $A + Bi = a + bi$ folgt nämlich immer $A = a$ und $B = b$. Denn man hat zunächst $A - a = (b - B)i$ und durch beiderseitige Erhebung aufs Quadrat unter der Bemerkung, dass $i^2 = -1$ ist,

$$(A - a)^2 = -(b - B)^2 \text{ oder } (A - a)^2 + (b - B)^2 = 0.$$

Quadrate sind immer positive Grössen; die Summe zweier positiven Grössen kann aber nur dann Null sein, wenn jede für sich $= 0$ ist. Daher muss $(A - a)^2 = 0$ und $(b - B)^2 = 0$ sein, woraus $A = a$, $B = b$ folgt, w. z. b. w.

Da nun die vorige Gleichung für jedes auch noch so grosse m gilt und nie zu gelten aufhört, so muss sie auch dann noch richtig bleiben, wenn man m unbegränzt zunehmen, folglich ϑ sich der Null nähern lässt und die Gränze sucht, welcher sich in diesem Falle der ganze Ausdruck links in (20) nähert. Wir betrachten zu diesem Zwecke jeden der Faktoren einzeln.

Zuvörderst ist

$$(\cos\vartheta x)^{\frac{1}{\vartheta}} = (1-\sin^2\vartheta x)^{\frac{1}{2\vartheta}}$$

$$= \left[(1-\sin^2\vartheta x)^{\frac{1}{\sin^2\vartheta x}}\right]^{\frac{\sin\vartheta x}{\vartheta x}\cdot\frac{x\sin\vartheta x}{2}},$$

wovon man sich durch Multiplikation der beiden Exponenten überzeugen kann. Nimmt nun ϑ unausgesetzt ab, so vermindern sich auch ϑx $\sin\vartheta x$ und $\sin^2\vartheta x$ bis zur Gränze Null. Es ist daher nach Formel (13) für $a=-1$, $\delta=\sin^2\vartheta x$

$$\mathrm{Lim}\,(1-\sin^2\vartheta x)^{\frac{1}{\sin^2\vartheta x}} = e^{-1} = \frac{1}{e};$$

ferner nach no. (1) für $\delta = \vartheta x$

$$\mathrm{Lim}\,\frac{\sin\vartheta x}{\vartheta x} = 1,$$

und weil ausserdem $\mathrm{Lim}\sin\vartheta x = 0$ ist, so wird jetzt

$$\mathrm{Lim}\,(\cos\vartheta x)^{\frac{1}{\vartheta}} = \left[\frac{1}{e}\right]^{1\cdot\frac{x.0}{2}} = 1,$$

womit der Gränzwerth des ersten Faktors in (20) gefunden ist.

Was den zweiten Faktor in (20) anbetrifft, so ist offenbar

$$(1+i\tan\vartheta x)^{\frac{1}{\vartheta}} = \left[(1+i\tan\vartheta x)^{\frac{1}{i\tan\vartheta x}}\right]^{\frac{\tan\vartheta x}{\vartheta x}xi}.$$

Die Grössen ϑx und $\tan\vartheta x$ nehmen hier mit ϑ gleichzeitig bis zur Null ab; es ist daher nach Formel (12)

$$\mathrm{Lim}\,(1+i\tan\vartheta x)^{\frac{1}{i\tan\vartheta x}} = e$$

und zwar reell, obgleich die Funktion imaginär ist, weil $i\tan\vartheta x$ mit ϑ gleichzeitig verschwindet und es also für den Endeffekt gleichgültig sein muss, ob die Grösse δ in (12) aus einer reellen oder imaginären

Gegend her bis zur Stelle Null gekommen ist. Ferner haben wir nach Formel (2) für $\delta = \vartheta x$

$$\operatorname{Lim} \frac{\tan \vartheta x}{\vartheta x} = 1,$$

mithin zusammen

$$\operatorname{Lim} (1 + i \tan \vartheta x)^{\frac{1}{\vartheta}} = e^{1 \cdot xi} = e^{xi}.$$

Benutzen wir nun die gefundenen Resultate für die Gleichung (20), so ergiebt sich die formell sehr merkwürdige Relation

$$e^{xi} = \cos x + i \sin x, \qquad (21)$$

welche uns ein Mittel giebt, um von der Exponenzialgrösse auf den Cosinus und Sinus zu kommen.

Diese Gleichung gilt übrigens ebenso allgemein, als die goniometrischen Formeln, von denen wir ausgegangen sind; man darf daher auch $-x$ an die Stelle von x setzen, wodurch man findet

$$e^{-xi} = \cos x - i \sin x.$$

Combinirt man diese Gleichung mit der vorigen durch Addition und Subtraktion, so gelangt man leicht zu den beiden Formeln

$$\cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}, \qquad (22)$$

$$\sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}; \qquad (23)$$

welche häufig gebraucht werden. Es würde hiernach auch leicht sein, alle übrigen goniometrischen Funktionen durch Exponentialgrössen mit imaginären Exponenten auszudrücken.

Die Gleichung (21) lässt sich leicht in einige andere Formen bringen, welche uns später ebenfalls von Wichtigkeit werden. Multiplizirt man nämlich beiderseits mit $e^{lr} = r$, so ist

$$e^{lr + xi} = r \cos x + ir \sin x, \qquad (24)$$

wobei man auch $r \cos x = \alpha$ und $r \sin x = \beta$ setzen kann, woraus folgt

$$(r \cos x)^2 + (r \sin x)^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

oder

$$r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

und ferner

$$\frac{r \sin x}{r \cos x} = \tan x = \frac{\beta}{\alpha},$$

mithin

$$x = \text{Arctan}\frac{\beta}{\alpha} + k\pi,$$

wo k eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet. Vermöge der neuen Werthe für $r\cos x$, $r\sin x$, r und x ist nun nach Formel (24)

$$e^{\frac{1}{2}l(\alpha^2+\beta^2)+i[\text{Arctan}\frac{\beta}{\alpha}+k\pi]} = \alpha + \beta i.$$

Da aber für $\beta = 0$ die Gleichung sich auf die Identität $e^{l\alpha} = \alpha$ reduziren muss, so folgt $k = 0$ und mithin einfacher

$$\alpha + \beta i = e^{\frac{1}{2}l(\alpha^2+\beta^2)+i\,\text{Arctan}\frac{\beta}{\alpha}}, \qquad (25)$$

wonach man jedes aus einem reellen und imaginären Theile bestehende Binom in Form einer Exponenzialgrösse darstellen kann.

Man kann die gefundene Gleichung auch umkehren, wenn man bemerkt, dass aus einer Gleichung wie $A = e^a$ immer folgt $lA = a$, was bekanntlich die Definition des Logarithmus ist. Behalten wir diese Definition auch hier bei, so folgt jetzt

$$l(\alpha + \beta i) = \tfrac{1}{2}l(\alpha^2 + \beta^2) + i\,\text{Arctan}\frac{\beta}{\alpha}. \qquad (26)$$

Ebenso leicht würde man für negativ β finden

$$l(\alpha - \beta i) = \tfrac{1}{2}l(\alpha^2 + \beta^2) - i\,\text{Arctan}\frac{\beta}{\alpha},$$

und wenn man diese Gleichung von der vorhergehenden subtrahirt und mit $2i$ dividirt

$$\frac{1}{2i}[l(\alpha + \beta i) - l(\alpha - \beta i)] = \text{Arctan}\frac{\beta}{\alpha}. \qquad (27)$$

Hier lässt sich die in Klammern stehende Differenz nach der Regel $lx - ly = l\frac{x}{y}$ zusammenziehen, weil diese Regel auch für imaginäre x und y gilt. Der Grund hiervon ist leicht einzusehen. Die Formel $lx - ly = l\frac{x}{y}$ ist bekanntlich eine unmittelbare Folge der Gleichung $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$, sobald man auf diese die Definition des Logarithmus $e^{lz} = z$ anwendet. Die Gleichung $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$ gilt aber auch für imaginäre x und y; denn man hat

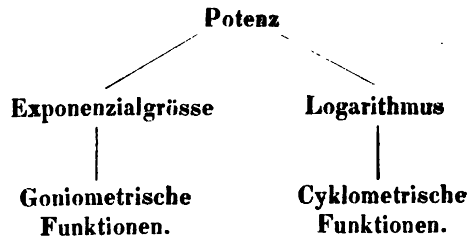
$$\begin{aligned} e^{xi} \cdot e^{yi} &= (\cos x + i\sin x)(\cos y + i\sin y) \\ &= \cos(x + y) + i\sin(x + y) = e^{(x+y)i}; \end{aligned}$$

da nun die Definition des imaginären Logarithmus der des reellen analog gebildet ist, so muss die Regel $lx - ly = l\frac{x}{y}$ auch für imaginäre x und y gelten. Demnach ist aus Formel (27)

$$\frac{1}{2i}\, l\left(\frac{\alpha + \beta i}{\alpha - \beta i}\right) = \text{Arctan}\,\frac{\beta}{\alpha}, \qquad (28)$$

wodurch der Uebergang vom Logarithmus zu den cyklometrischen Funktionen überhaupt hergestellt ist, da man die übrigen Funktionen $\text{Arcsin}\,\frac{\beta}{\alpha}$, $\text{Arccos}\,\frac{\beta}{\alpha}$ etc. leicht durch $\text{Arctan}\,\frac{\beta}{\alpha}$ ausdrücken kann.

Ein Blick auf den ganzen Gedankengang zeigt uns nun den Zusammenhang der verschiedenen Funktionen nach folgendem Schema:



Der erste Uebergang von der Potenz zur Exponenzialgrösse und zum Logarithmus geschieht mittelst einer Gränzbestimmung; von da kommen wir mit Hülfe der imaginären Beziehungen auf der linken Seite zu den goniometrischen, auf der rechten zu den cyklometrischen Funktionen. Zugleich sind die einander gegenüberstehenden Funktionen die Umkehrungen von einander.

Wir können uns jetzt leicht einen Begriff von dem nützlichen Gebrauche des obigen Schema's machen, wenn es auch hier nicht möglich ist, ein Beispiel davon zu geben. Gesetzt, man hätte die Potenz für jeden Werth des Exponenten in eine Reihe, ein Produkt, einen Kettenbruch verwandelt, oder in sonst eine andere analytische Form gebracht, so wäre es sehr leicht, für die übrigen Funktionen des obigen Schema's die entsprechende analytische Form aufzufinden. Man brauchte nur auf jedes Glied der Reihe, des Kettenbruches etc. ganz dieselben Operationen anzuwenden, durch welche man die neue Funktion aus der alten ableitet. So würde man z. B. aus einer Reihe für b^{μ} eine Reihe für e^{a} dadurch entwickeln, dass man in jedem einzelnen

Reihengliede $1+a\delta$ für b, $\frac{1}{\delta}$ für μ setzte und dann zur Gränze für unausgesetzt abnehmende δ überginge. Die wirkliche Ausführung dieses Gedankens bei verschiedenen analytischen Formen ist das Geschäft des speziellen Theiles der algebraischen Analysis, welchem der oben schematisch angegebene organische Zusammenhang einer gewissen Reihe von Funktionen als leitender Faden zu Grunde liegt, woran sich die verschiedenen Resultate aufreihen. Indessen ist das Detail hiervon für unsere Zwecke nicht nöthig, und wir verlassen daher diese Betrachtungen, um uns dagegen einem anderen Kreise von Untersuchungen zuzuwenden, worin wir den höheren Rechnungsweisen näher treten und uns über Mittel und Zwecke derselben völlig verständigen können.

Die grösste Schwierigkeit, welche die Mathematik im Verlaufe ihrer stufenweisen Ausbildung zu überwinden hatte, war die Lösung des Problemes: das Gesetz der Stetigkeit, nach welchem sich alle in Raum oder Zeit ausgedehnten Grössen bilden, auf mathematische Begriffe zu bringen und es hiermit entweder durch Construktion oder durch Rechnung in den Kreis ihrer Betrachtungen zu verflechten. Schon in der Arithmetik kommen einige Fälle vor, bei welchen sich die genannte Schwierigkeit fühlbar macht (z. B. bei den periodischen Dezimalbrüchen und irrationalen Wurzeln) und noch häufiger begegnet man ihr in der algebraischen Analysis, die sich zur Ueberwindung derselben den eigenthümlichen Begriff der Gränze bilden muss. Theilen wir z. B. eine Grösse nach irgend einem Theilungsgesetze, etwa durch fortgesetzte Halbirung, in immer kleinere Theile und versuchen wir nachher dieselbe wieder aus ihren Theilen zusammenzusetzen, so stossen wir auf das für den ersten Anblick paradoxe Problem der Summirung einer unendlichen Menge immer kleiner werdender Grössen (der einzelnen Theile); hier liegt die Schwierigkeit blos in der vermöge des Gesetzes der Stetigkeit unbegränzten Theilbarkeit der ursprünglich vorgenommenen Grösse; denn wenn man im Verlaufe der successiven Theilung auf ein untheilbares Letztes käme, so würde die entsprechende Reihe eine endliche sein. In weit verwickelterer Gestalt aber erscheint die Forderung, sich des Stetigkeitsgesetzes mathematisch zu versichern, da, wo wir es nicht mit einer Grösse allein, sondern mit einem System zweier oder mehrerer Grössen zu thun haben, in welchem die eine Grösse den stetigen Aenderungen der anderen ihre Existenz zu verdanken hat. Betrachtungen dieser eigenthümlichen Art kommen ganz besonders häufig in der Mechanik vor und geben dann immer zu einigen Aufgaben Veranlassung, deren hauptsächlichste im Allgemeinen so lautet: welcher ist der Totaleffekt einer Ursache, welche eine gewisse Zeit lang wirksam gewesen ist, vorausgesetzt, dass man entweder, wenn die Intensität der Ursache während jener

Zeit constant bleibt, diese Intensität selbst kennt, oder, wenn sich die Intensität mit der Zeit ändert, ihren anfänglichen Grad und das Gesetz ihrer Aenderung weiss? Es giebt aber auch Probleme der Geometrie, welche ganz das nämliche Gepräge tragen und namentlich gehören hieher alle Aufgaben über die Quadratur und Rektifikation der Curven, die Cubatur und Complanation der Flächen. So können wir uns z. B. in fig. 1 die von der Geraden AB, den Senkrechten AP, BQ und der Curve $PN_1N_2 \ldots Q$ eingeschlossene Fläche dadurch entstanden denken, dass eine auf OX senkrechte Linie XY aus der Lage AP parallel mit sich selbst bis BQ stetig fortgerückt ist, während der Endpunkt Y auf ihr selbst stetig auf und abstieg und so die begränzende Curve erzeugte. Natürlich muss in jedem bestimmten Falle das Gesetz bekannt sein, nach welchem der Punkt Y auf- und absteigt, wenn er gerade diese oder jene bestimmte Curve beschreiben soll. Dieses Beispiel bildet ein vollkommenes Analogon zu dem obenangeführten Probleme der Mechanik, welches man sehr leicht dadurch auf dasselbe reduziren kann, dass man sich die Zeit auf der Geraden OX ausgedehnt, die veränderliche Ursache als die variabele Ordinate XY und die während einer bestimmten Zeit AB hervorgebrachte Wirkung als die überstrichene Fläche $ABQP$ denkt. Wir können demnach die Quadratur einer krummen Linie als das allgemeine Schema dieser ganzen Klasse von Aufgaben gelten lassen *).

Vergleichen wir mit dieser Entstehungsweise einer Grösse die anfangs betrachtete in der algebraischen Analysis vorkommende, so finden wir einen wesentlichen Unterschied. Dort würden wir die Fläche aus ihren Theilen, etwa ihrer Hälfte, dem Viertel, Achtel etc., also wieder aus Flächen zusammensetzen, oder überhaupt irgend eine Grösse als Aggregat ihrer mit ihr selbst gleichartigen Theile ansehen, hier aber lassen wir die Fläche durch stetige Bewegung einer Geraden, und überhaupt eine Grösse durch stetige Veränderung einer mit ihr ungleichartigen entstehen. Während sich also die algebraische Analysis vorzüglich mit Beziehungen zwischen gleichartigen Grössen beschäftigt, bekommen wir es auf unserem Felde mit Relationen zwischen solchen Grössen zu thun, welche entweder geradezu

*) Sehr schöne synthetische Betrachtungen dieses Genre's kommen in Newtons Principiis philos. nat. vor (de motu corporum liber primus sectio I), womit man überhaupt diese ganze Einleitung zusammenhalten möge.

ungleichartig sind, oder es wenigstens werden, sobald man ihnen eine geometrische oder physikalische Bedeutung unterlegt.

Treten wir jetzt näher an die vorhin angeregte Aufgabe über die Quadratur einer Curve, die wir als allgemeinen Typus unserer sämmtlichen Aufgaben anzusehen haben. Für die Elementargeometrie ist dieselbe ohne Zuziehung eines neuen Prinzipes offenbar ganz unlösbar, weil vermöge des Gesetzes der Stetigkeit kein Theil einer krummen Linie, sei er auch noch so klein, eine Gerade ist und folglich kein Theil der fraglichen Fläche als geradlinig begränzt angesehen und danach seine Grösse berechnet werden könnte. Wenn wir nun aber auch vor der Hand auf eine vollkommen genaue Lösung unserer Aufgabe Verzicht leisten müssen, so wäre es bei der Wichtigkeit derselben doch wohl der Mühe werth, wenigstens eine angenäherte Bestimmung der unbekannten Fläche zu versuchen, was für manche, namentlich praktische Zwecke, schon hinreichen könnte. Hierzu bietet sich ganz von selbst ein sehr einfacher Gedanke an.

Theilen wir die Basis AB unserer Fläche in beliebig viele Theile AM_1, M_1M_2, $M_2M_3, \ldots M_{n-1}B$, deren Anzahl n betragen möge, und ziehen wir durch jeden der Theilpunkte M_1, $M_2, \ldots M_{n-1}$ eine Senkrechte auf AB, so zerfällt die ganze Fläche in eine Reihe von Streifen, welche wir mit einiger Aufopferung der Genauigkeit als Rechtecke ansehen und danach ihre Inhalte berechnen können. Lassen wir ferner, um eine bestimmte Bezeichnung einführen zu können, $y=f(x)$ die Gleichung der Curve bedeuten, wenn für O als Anfangspunkt der Coordinaten $OX=x$, $XY=y$ und $f(x)$ eine beliebige Funktion von x ist, setzen wir endlich

$$OA=a,\ OB=b,\ \text{mithin}\ AB=b-a$$

und

$$AM_1=\delta_1,\ M_1M_2=\delta_2,\ M_2M_3=\delta_3, \ldots M_{n-1}B=\delta_n,$$

also

$$\delta_1+\delta_2+\delta_3+\ldots+\delta_{n-1}=b-a,$$

so ist vermöge der Gleichung der Curve

$$AP=f(a),\ M_1N_1=f(a+\delta_1),\ M_2N_2=f(a+\delta_1+\delta_2), \ldots$$
$$M_{n-1}N_{n-1}=f(a+\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_{n-1}),\ BQ=f(b);$$

und folglich haben wir näherungsweis:

$$AM_1N_1P = AM_1 . AP = \delta_1 f(a)$$
$$M_1M_2N_2N_1 = M_1M_2 . M_1N_1 = \delta_2 f(a+\delta_1)$$
$$M_2M_3N_3N_2 = M_2M_3 . M_2N_2 = \delta_3 f(a+\delta_1+\delta_2)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$M_{n-1}BQN_{n-1} = M_{n-1}B . M_{n-1}N_{n-1} = \delta_n f(a+\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_{n-1})$$

und durch Addition dieser Gleichungen ergiebt sich jetzt folgende Näherungsformel für die Fläche $ABQP$:

$$\delta_1 f(a) + \delta_2 f(a+\delta_1) + \delta_3 f(a+\delta_1+\delta_2) + \ldots + \delta_n f(a+\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_{n-1}),$$

wobei nicht zu vergessen ist, dass die Bedingung

$$\delta_1+\delta_2+\delta_3+\ldots+\delta_{n-1} = b-a$$

erfüllt sein muss.

Aber diese Näherung muss als eine noch ganz rohe bezeichnet werden, da wir nicht im Stande sind, den Grad derselben zu beurtheilen, oder, was auf das Nämliche hinauskommt, da wir die Gränzen nicht kennen, zwischen denen der begangene Fehler liegt. Wir werden daher genöthigt sein, diesen Mangel durch eine schärfere Auffassung unseres Problemes zu ergänzen, was vielleicht sogar die Möglichkeit gewähren könnte, uns von einer ungefähren Angabe des gesuchten Flächeninhaltes zu einer vollkommen genauen Berechnung desselben zu erheben. Hierzu führen die folgenden Untersuchungen. Die in den Entfernungen δ_1, δ_2, δ_3, etc. gezogenen Ordinaten M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3, etc. kann man immer so legen, dass die begränzende Curve zwischen je zweien von ihnen entweder blos steigt oder blos fällt. In der That ist hierzu weiter nichts nöthig, als dass man zuerst von den höchsten und tiefsten Punkten der krummen Linie (in fig. 1 z. B. N_1, N_3, etc.) Perpendikel auf die Basis AB herablässt und zwischen diesen dann beliebig viele andere Ordinaten einschaltet. Unter allen den verschiedenen, theils positiven, theils negativen Differenzen, welche diese Ordinaten bilden, also unter den Grössen

$$f(a+\delta_1)-f(a),\ f(a+\delta_1+\delta_2)-f(a+\delta_1), \ldots.$$
$$f(a+\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_n)-f(a+\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_{n-1})$$

muss es nun nothwendig eine absolutgrösste geben, welche etwa durch zwei in der Entfernung δ_k von einander stehende Ordinaten gebildet

wird, wobei δ_k eine unter den Grössen $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$ bezeichnet. Nennen wir p die Entfernung des Fusspunktes der ersten dieser Ordinaten vom Anfangspunkte O, so sei

$$f(p+\delta_k)-f(p)=\lambda$$

das Maximum der Ordinatendifferenzen. Ist ferner in fig. 2. $MM'Q'Q$ irgend einer der Streifen, in welche bei der vorigen Construktion die krummlinigbegränzte Fläche zerlegt wurde, und $AM = \delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_{h-1}$, $MM'=\delta_h$, so nehme man von Q aus $QL=QL' = \lambda$ und vollende das Rechteck $LGG'L'$; hier liegt, weil TQ' kleiner als das Ordinatendifferenzenmaximum $TG=\lambda$ ist, der Punkt G jedenfalls über Q', und G' unter Q', ebenso L über Q, und L' unter Q. Da nun die Curve während des Intervalles MM' entweder blos steigt oder blos fällt, so muss das Stück QQ' derselben ganz innerhalb des Rechteckes $LGG'L'$ liegen *), und hieraus folgt unmittelbar

$$MM'Q'Q < MM'GL \text{ und } MM'Q'Q > MM'G'L'$$

oder

$$MM'Q'Q < MM'.ML \text{ und } MM'Q'Q > MM'.ML',$$

oder wenn man für MM' seinen vorher bestimmten Werth setzt und bemerkt, dass $ML=MQ+\lambda$, $ML'=MQ-\lambda$ ist,

$$MM'Q'Q < \delta_h[f(a+\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_{h-1})+\lambda],$$
$$MM'Q'Q > \delta_h[f(a+\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_{h-1})-\lambda];$$

und wenn man den Streifen $MM'Q'Q$ mit u_h bezeichnet,

$$\delta_h[f(a+\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_{h-1})+\lambda] > u_h > \delta_h[f(a+\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_{h-1})-\lambda],$$

und diess gilt auch dann noch, wenn $OM=p$, also $\delta_h=\delta_k$ wäre, wo die Ordinatendifferenz ihr Maximum erreicht. Denn für diesen Fall würde sich die Zeichnung nur darin ändern, dass Q' mit einem der Punkte G, G' zusammenfiele.

Denken wir uns jetzt die vorige Betrachtung auf jeden der in fig. 1. vorkommenden Streifen angewendet, so haben wir folgende Reihe von Ungleichungen:

---

*) Diese Behauptung nebst ihren Consequenzen würde falsch sein, wenn die begränzende Curve während jenes Intervalles zugleich steigen und fallen dürfte. Dann könnte sich nämlich die Zeichnung wie in fig. 3. gestalten, wo man nicht behaupten kann, dass $MM'Q'Q < MM'GL$ sein müsse.

$$\delta_1 [f(a) + \lambda] > u_1 > \delta_1 [f(a) - \lambda]$$
$$\delta_2 [f(a+\delta_1) + \lambda] > u_2 > \delta_2 [f(a+\delta_1) - \lambda]$$
$$\delta_3 [f(a+\delta_1+\delta_2) + \lambda] > u_3 > \delta_3 [f(a+\delta_1+\delta_2) - \lambda]$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\delta_n [f(a+\delta_1+\ldots+\delta_{n-1}) + \lambda] > u_n > \delta_n [f(a+\delta_1+\ldots+\delta_{n-1}) - \lambda],$$

aus deren Addition die neue Ungleichung entspringt:

$$\begin{aligned} &\delta_1 f(a) + \delta_2 f(a+\delta_1) + \delta_3 f(a+\delta_1+\delta_2) + \ldots + \delta_n f(a+\delta_1+\ldots+\delta_{n-1}) \\ &\quad + \lambda(\delta_1+\delta_2+\delta_3+\ldots\ldots+\delta_n) \\ &\quad > u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots + u_n > \\ &\delta_1 f(a) + \delta_2 f(a+\delta_1) + \delta_3 f(a+\delta_1+\delta_2) + \ldots + \delta_n f(a+\delta_1+\ldots+\delta_{n-1}) \\ &\quad - \lambda(\delta_1+\delta_2+\delta_3+\ldots\ldots+\delta_n). \end{aligned}$$

Hier ist die Reihe $\delta_1 f(a) + \delta_2 f(a+\delta_1) +$ etc. die Summe der Rechtecke, die uns früher zur näherungsweisen Bestimmung der gesuchten Fläche führte; wir wollen sie mit S_n bezeichnen, so dass

$$\begin{aligned} S_n = \delta_1 f(a) + \delta_2 f(a+\delta_1) + \delta_3 f(a+\delta_1+\delta_2) + \ldots \\ \ldots + \delta_n f(a+\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_{n-1}) \end{aligned}$$

ist. Ferner hat man $\delta_1+\delta_2+\delta_3+\ldots+\delta_n = b-a$ und die Summe der krummlinigbegränzten Streifen u_1, u_2, $u_3 \ldots u_n$ gleich der gesuchten Fläche über $AB = b-a$, die wir, weil sie eine Funktion der Basis ist, $= F(b-a)$ setzen wollen. Durch Einführung dieser Abkürzungen geht die obige Ungleichung in die folgende über:

$$S_n + \lambda(b-a) > F(b-a) > S_n - \lambda(b-a).$$

Hiermit ist das Problem gelöst, die Gränzen zu finden, innerhalb welcher der Fehler liegen muss, den man dadurch begeht, dass man statt der krummlinigbegränzten Fläche $F(b-a)$ die Rechtecksumme S_n setzt. Denn es folgt jetzt

$$\lambda(b-a) > F(b-a) - S_n > -\lambda(b-a),$$

so dass also der absolute Werth des begangenen Fehlers kleiner als das Produkt aus der Basis und dem Maximum der Ordinatendifferenzen ist.

Wir haben nun blos noch einen Schritt zu thun, um uns zu überzeugen, dass die Annäherung der Rechtecksumme an die Fläche so weit getrieben werden kann, als es nur verlangt wird. Denken wir uns nämlich die Ordinaten $M_1 N_1$, $M_2 N_2$, ... $M_{n-1} N_{n-1}$ festgehalten und zwischen ihnen eine beliebige Menge anderer eingeschaltet, so

wird die Begränzungscurve auch zwischen je zweien unter allen den nunmehr dastehenden Ordinaten entweder blos steigen oder blos fallen, und folglich sind die neuen Differenzen kleiner als die alten. Nun ist aber die begränzende krumme Linie durch eine stetige Bewegung entstanden, mithin selbst eine stetig verlaufende; fahren wir daher mit der Einschaltung immer neuer Ordinaten fort, so können wir die Differenzen der benachbarten Ordinaten kleiner als jede noch so kleine angebbare Grösse machen und folglich auch das Differenzenmaximum λ und ebenso das Produkt $\lambda(b-a)$ auf jeden beliebigen Grad der Kleinheit herabbringen. Der Fehler $F(b-a)-S_n$ ist also, wenn man die Anzahl n der Ordinaten vermehrt und die Entfernungen $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$ derselben beständig verringert, einer unbegränzten Verkleinerung fähig. Könnte man $\lambda=0$ machen, so wäre $F(b-a)-S_n=0$, folglich vollkommen genau $F(b-a)=S_n$. Diess lässt sich aber durch Construktion nicht erreichen; denn wie viele Ordinaten man auch eingeschaltet haben, wie gross also n und wie klein auch δ_k sein mag, so ist doch $\lambda=f(p+\delta_k)-f(p)$ nicht schlechthin $=0$. Dagegen kann man arithmetisch zum Ziele kommen, wenn man die Null als den G r ä n z-w e r t h betrachtet, dem sich alle die Grössen nähern, die einer unbegränzten Verringerung fähig sind. Gehen wir daher zur Gränze über für unausgesetzt abnehmende $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_k, \ldots \delta_n$ und unbegränzt wachsende n, so wird

$$\operatorname{Lim} \lambda=0, \ \operatorname{Lim}\{F(b-a)-S_n\}=0,$$
$$\text{oder} \quad F(b-a)=\operatorname{Lim} S_n,$$

und vermöge der Bedeutung von S_n:

$$F(b-a)=$$
$$\operatorname{Lim}\{\delta_1 f(a)+\delta_2 f(a+\delta_1)+\delta_3 f(a+\delta_1+\delta_2)+\ldots+\delta_n f(a+\delta_1+\ldots+\delta_{n-1})\},$$

wobei immer

$$\delta_1+\delta_2+\delta_3+\ldots+\delta_n=b-a$$

sein muss.

Hiermit ist nun eine vollkommen genaue Formel gefunden. Dieselbe gestaltet sich noch etwas einfacher, wenn man die Grössen δ_1, δ_2, δ_3, $\ldots \delta_n$ einander gleich und $=\delta$ setzt; es ist dann:

$$F(b-a)=$$
$$\operatorname{Lim}\{\delta[f(a)+f(a+\delta)+f(a+2\delta)+\ldots+f(a+\overline{n-1}\delta)]\}.$$
$$(n\delta=b-a).$$

Nimmt man noch $a=0$, $b=x$, so wird

$$F(x)=\text{Lim}\{\delta[f(0)+f(\delta)+f(2\delta)+\ldots+f(\overline{n-1}\,\delta)]\},$$
$$(n\delta=x),$$

oder weil aus $n\delta=x$, $\delta=\frac{x}{n}$ folgt:

$$F(x)=\text{Lim}\left\{\frac{x}{n}\left[f(0)+f\left(\frac{x}{n}\right)+f\left(\frac{2x}{n}\right)+\ldots+f\left(\frac{\overline{n-1}\,x}{n}\right)\right]\right\}$$

Die beiden letzten Formeln geben die über der Strecke $OX=x$ (in fig. 1.) stehende, durch $OR=f(0)$, $XY=f(x)$ und die Curve $RPQY$ begränzte Fläche. Man kann daraus die vorige Fläche leicht wieder erhalten; wenn man $x=b$, $x=a$ setzt und die beiden so entstehenden Werthe, nämlich die Flächen $OBQR$ und $OAPR$, von einander abzieht.

Es spricht sich in den obenentwickelten Formeln auch ein ganz allgemeines Gesetz aus, welches eine Relation zwischen den beiden verschiedenen Entstehungsweisen einer Grösse angiebt. Die Funktionen $F(x)$ und $f(x)$ bedeuten nämlich ungleichartige Grössen, von denen die erstere durch stetige Aenderung der letzteren entstanden ist, unsere Formel aber, welche der analytische Ausdruck für diesen Process ist, verlangt zwei Operationen, erstlich die Addition der Produkte $\frac{x}{n}f(0)$, $\frac{x}{n}f\left(\frac{x}{n}\right)$, $\frac{x}{n}f\left(\frac{2x}{n}\right)$ etc. und darauf einen Gränzenübergang. Bemerken wir nun, dass jene Produkte mit $F(x)$ gleichartig sind, weil sie Theile von $F(x)$ bedeuten, so haben wir folgendes allgemeine Theorem:

Von den zwei möglichen verschiedenen Entstehungsweisen einer Grösse, die man vielleicht nicht unpassend einer unorganischen Anhäufung und einem organischen Processe vergleichen könnte, lässt sich die zweite auf die erste zurückführen, wenn man mit dieser die Operation eines Gränzenüberganges verbindet.

Als Beispiele hierzu wollen wir in der letzten der gefundenen Formeln folgende spezielle Fälle der Funktion $f(x)$ betrachten.

1) Es sei $f(x)=gx$, wo g einen constanten Faktor bedeutet. Es ist dann

$$F(x)=\mathrm{Lim}\left\{\frac{x}{n}\left[g\frac{x}{n}+g\frac{2x}{n}+g\frac{3x}{n}+\ldots+g\frac{\overline{n-1}x}{n}\right]\right\}$$
$$=\mathrm{Lim}\left\{g\frac{x^2}{n^2}[1+2+3+\ldots+(n-1)]\right\}.$$

Andererseits hat man aber nach einer bekannten Formel

$$1+2+3+\ldots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2},$$

folglich

$$\frac{x^2}{n^2}[1+2+3+\ldots+(n-1)]=\frac{x^2}{n^2}.\frac{n(n-1)}{2}=(1-\frac{1}{n})\frac{x^2}{2}$$

und hieraus durch Uebergang zur Gränze für unausgesetzt wachsende n

$$F(x)=\mathrm{Lim}\,g(1-\frac{1}{n})\frac{x^2}{2}=g\frac{x^2}{2}.$$

Diess stimmt in der That mit dem Resultate zusammen, welches sich unmittelbar aus der Geometrie ergiebt, wenn man bemerkt, dass für $f(x)=gx$ die Curven RY zu einer durch den Punkt O gehenden Geraden wird und mithin die Fläche $OXYR$ sich in das Dreieck OXY verwandelt, dessen Inhalt $=\frac{1}{2}OX.XY=\frac{1}{2}x.gx=g\frac{x^2}{2}$ ist. *)

2) Für $f(x)=gx^2$ findet sich sehr leicht

$$F(x)=\mathrm{Lim}\left\{g\frac{x^3}{n^3}[1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2]\right\},$$

oder weil bekanntlich

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2=\frac{(2n-1)n(n-1)}{6}$$

ist, auch

$$F(x)=\mathrm{Lim}.\,g\frac{(2n-1)n(n-1)}{n^3}.\frac{x^3}{6}=\mathrm{Lim}.\,g(2-\frac{1}{n})(1-\frac{1}{n})\frac{x^3}{6}$$

oder

$$F(x)=g\frac{x^3}{3}.$$

Hierin spricht sich die von Archimedes gefundene Quadratur der Para-

*) Denkt man sich x als die verfliessende Zeit, gx als Geschwindigkeit eines bewegten Punktes und $F(x)$ als den von ihm durchlaufenen Raum, so ergiebt sich der Satz: „nimmt die Geschwindigkeit eines Punktes der Zeit proportional zu, so verhalten sich die durchlaufenen Räume wie die Quadrate der Zeiten", der als das Galileische Fallgesetz bekannt ist.

bel aus. Ziehen wir nämlich durch den Scheitel O einer Parabel (fig. 4) OX senkrecht auf die Achse und setzen $OX = x$, $XY = y$, so ist bekanntlich $y = gx^2$ die Gleichung der Parabel. Schreibt man das gefundene Resultat unter der Form $\frac{x \cdot gx^2}{3}$, so erkennt man auf der Stelle, dass die Fläche $OXYQ$ ein Drittheil von der Fläche des Rechtecks $OXYZ$ ist, woraus folgt, dass die Fläche $OQYZ$ zwei Drittheile desselben ausmacht, was zuerst von Archimedes bewiesen wurde.

3) Für $f(x) = a^x$ hat man

$$F(x) = \text{Lim} \left\{ \frac{x}{n} [1 + a^{\frac{x}{n}} + a^{\frac{2x}{n}} + \ldots + a^{\frac{\overline{n-1}x}{n}}] \right\}.$$

Die eingeklammerte Reihe lässt sich leicht summiren, wenn man sie in folgender Form darstellt

$$1 + a^{\frac{x}{n}} + (a^{\frac{x}{n}})^2 + (a^{\frac{x}{n}})^3 + \ldots + (a^{\frac{x}{n}})^{n-1}$$

und nun die bekannte Summenformel

$$1 + u + u^2 + u^3 + \ldots + u^{n-1} = \frac{u^n - 1}{u - 1}$$

für $u = a^{\frac{x}{n}}$ in Anwendung bringt. Man findet so:

$$F(x) = \text{Lim} \frac{x}{n} \cdot \frac{(a^{\frac{x}{n}})^n - 1}{a^{\frac{x}{n}} - 1} = \text{Lim} \frac{a^x - 1}{(a^{\frac{x}{n}} - 1) : \frac{x}{n}}.$$

Nach Formel (14) auf Seite XII ist aber für unausgesetzt abnehmende δ

$$\text{Lim} \frac{a^\delta - 1}{\delta} = la,$$

wo la den natürlichen Logarithmus von a bedeutet, folglich wenn $\delta = \frac{x}{n}$ gesetzt wird und jetzt n ins Unendliche wächst,

$$\text{Lim} (a^{\frac{x}{n}} - 1) : \frac{x}{n} = la.$$

Unter Anwendung dieses Satzes ergiebt sich aus dem Vorigen

$$F(x) = \frac{a^x - 1}{la}.$$

Man wird aus diesen Beispielen leicht ersehen, in welcher Weise die bei der allgemeinen Formel angedeuteten Rechnungsoperationen auszuführen sind. Zuvörderst hat man in jedem speziellen Falle die Summe der endlichen Reihe

$$f(0)+f\left(\frac{x}{n}\right)+f\left(\frac{2x}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{\overline{n-1}\,x}{n}\right)$$

aufzusuchen, weil man ohne diese den Totaleffekt nicht beurtheilen kann, welchen das beständige Anwachsen der Zahl n hervorbringt. Diese Nothwendigkeit der Summirung einer endlichen Reihe verursacht eine nicht geringe Schwierigkeit in der Behandlung aller Aufgaben dieser Art. Wir kennen nämlich nur von einigen wenigen endlichen Reihen die Summen, aber auch selbst diese würden für eine systematische Bearbeitung unseres Problemes nur von sehr untergeordneter Bedeutung sein. Denn hier käme es zunächst darauf an, für alle die aus der algebraischen Analysis bekannten Funktionen:

$$f(x)=x^a,\ a^x,\ lx,\ \sin x,\ \cos x,\ \tan x,\ \cot x,\ldots$$
$$\text{Arcsin}\,x,\ \text{Arccos}\,x,\ \text{Arctan}\,x,\ldots$$

die zugehörigen Funktionen $F(x)$ aufzusuchen, die gewissermassen die Grundpfeiler des ganzen neuen Calcüls ausmachen würden. Aber da stossen wir schon bei der ersten Aufgabe auf eine grosse Schwierigkeit; es wäre nämlich zu ihrer Lösung nothwendig, die Summe der Reihe

$$\left(\frac{x}{n}\right)^a+\left(\frac{2x}{n}\right)^a+\left(\frac{3x}{n}\right)^a+\cdots+\left(\frac{\overline{n-1}\,x}{n}\right)^a$$

d h. die der etwas einfacheren

$$1^a+2^a+3^a+\ldots+(n-1)^a$$

für jedes beliebige a ausfindig zu machen, was in dieser Allgemeinheit mit den Hülfsmitteln der gewöhnlichen Algebra — und andere haben wir hier nicht — geradezu unmöglich ist. Nicht besser würde es uns für $f(x)=\tan x$, $\text{Arcsin}\,x$ etc. gehen.

Wie aber, wenn man statt fruchtloser Bemühungen, die angedeuteten Schwierigkeiten zu beseitigen, eine Umgehung derselben versuchte? Könnte man nicht vielleicht einen indirekten Weg einschlagen, etwa durch Umkehrung der Aufgabe selbst? Es ist nicht schwer,

diese Frage gehörig zu beurtheilen. Nehmen wir an, es sei die umgekehrte Aufgabe gelöst und man habe für verschiedene Funktionen $F(x)$ die entsprechenden $f(x)$ gefunden, so würde man sich eine Tabelle dieser Resultate machen können, welche etwa so aussähe:

Gegebene $F(x)$	Gesucht $f(x)$
$\frac{1}{2}gx^2$	gx
$\frac{1}{3}gx^3$	gx^2
$\frac{a^x - 1}{la}$	a^x

Wollte man nun dagegen zu einem gegebenen $f(x)$ das zugehörige $F(x)$ finden, so brauchte man blos nachzusehen, ob die vorgelegte Funktion $f(x)$ unter der Rubrik $f(x)$ vorkommt; die links daneben stehende Funktion wäre dann das gesuchte $F(x)$. Ja, was noch mehr ist, es muss sogar möglich sein, allgemeine Regeln zu entdecken, nach welchen man zu einer Funktion, die zwar selbst nicht unter der Ueberschrift $f(x)$ steht, die aber aus anderen zusammengesetzt ist, die einzeln unter dieser Ueberschrift vorkommen, die zugehörige Funktion aus denjenigen Funktionen ableiten kann, welche den Theilen der gegebenen Funktion entsprechen. So wird man z. B. aus der allgemeinen Gleichung, welche den Zusammenhang zwischen $f(x)$ und $F(x)$ angiebt, leicht das Theorem ableiten: wenn zu $f(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ die Funktionen $F(x)$, $\Phi(x)$, $\Psi(x)$ gehören und

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$$

ist, so muss auch

$$F(x) = \Phi(x) + \Psi(x)$$

sein. Daraus folgt z. B., dass der Funktion $f(x) = gx + gx^2$ die Funktion $F(x) = x\,\tfrac{1}{2}g^2 + {}_3gx^3$ entspricht.

Soll aber die praktische Ausführung des Gedankens, vorerst aus der Natur der Funktion $F(x)$ die von $f(x)$ zu bestimmen, möglich sein, so müssen sich die Rechnungsoperationen, mittelst welcher man $f(x)$ aus $F(x)$ abzuleiten hätte, einfacher als die gestalten, welche wir der umgekehrten Aufgabe dienen sahen. Ehe wir diess entscheiden können, müssen wir natürlich die fraglichen Operationen erst kennen zu lernen suchen und zu diesem Zwecke wenden wir uns an fig. 5. In dieser sei wie bisher $OX = x$, $XY = f(x)$ und die Fläche $OXYR$

$= F(x)$, wobei wir jetzt die letztere Funktion als bekannt anzusehen haben. Geben wir dem x einen Zuwachs $XX' = \delta$, so nimmt $F(x)$ um den Streifen $XX'Y'Y$ zu. Da die Grösse δ noch beliebig ist, so können wir dieselbe immer so gross oder nöthigenfalls so klein nehmen, dass die Curve RYY' von Y bis Y' entweder blos steigt oder blos fällt. Wir haben nun $OX'Y'R = F(x+\delta)$, $XX'Y'Y = F(x+\delta) - F(x)$; ziehen wir $YT' \parallel Y'T \parallel XX'$, so ist, wenn ein beständiges Steigen der Curve Statt findet,

$$XX'Y'T > XX'Y'Y > XX'T'Y$$

oder

$$XX'.X'Y' > XX'Y'Y > XX'.XY$$

d. i. nach unserer Bezeichnungsweise

$$\delta f(x+\delta) > F(x+\delta) - F(x) > \delta f(x),$$

und wenn die Curve beständig fällt wie in fig. 6.

$$XX'T'Y > XX'Y'Y > XX'Y'T$$

oder

$$XX'.XX > XX'Y'X > XX'.X'X'$$

d. i.

$$\delta f(x) > F(x+\delta) - F(x) > \delta f(x+\delta).$$

Aus diesen beiden Ungleichungen ergeben sich durch Division mit δ die beiden folgenden:

$$f(x+\delta) > \frac{F(x+\delta) - F(x)}{\delta} > f(x),$$

$$f(x) > \frac{F(x+\delta) - F(x)}{\delta} > f(x+\delta);$$

welche man dadurch in eine einzige zusammenfassen kann, dass man sagt: der Quotient

$$\frac{F(x+\delta) - F(x)}{\delta}$$

liegt jedenfalls zwischen $f(x)$ und $f(x+\delta)$, gleichviel welcher von den beiden letzteren Ausdrücken der grössere ist. Aus dieser Eigenschaft von $f(x)$ und $f(x+\delta)$ ergiebt sich nun leicht ein Mittel, um $f(x)$ durch $F(x)$ auszudrücken. Lassen wir nämlich δ beständig abnehmen, so rücken die Werthe von $f(x)$ und $f(x+\delta)$ immer näher an einander und folglich auch immer näher an den zwischen ihnen liegenden Quotienten. Hat endlich δ die Gränze Null erreicht, so fallen die beiden

äussersten Werthe zusammen und da der fragliche Quotient immer zwischen ihnen bleibt, so muss er ihrem gemeinschaftlichen Werthe $f(x)$ gleich sein. Die bisherige Ungleichung verwandelt sich daher in die folgende Gleichung:

$$f(x) = \text{Lim} \frac{F(x+\delta) - F(x)}{\delta},$$

mit welcher unser Problem gelöst ist.

Vergleichen wir die Operationen, durch die $f(x)$ aus $F(x)$ abgeleitet wird, mit denen, welche zur Lösung der früheren direkten Aufgabe nöthig waren, so werden wir in Absicht auf die Einfachheit derselben einen wesentlichen Unterschied wahrnehmen. Während dort die Summirung einer Reihe verlangt wurde, haben wir es hier blos mit einer Differenz zu thun, im Uebrigen aber bleibt sich Alles gleich, da wir beiderseits die Operation des Gränzenüberganges ausführen müssen. Da gar kein Zweifel darüber sein kann, welche von beiden Operationen die einfachere und leichtere ist, so werden wir nun den bereits angedeuteten Gedankengang wirklich ausführen, indem wir zuerst die Aufgabe behandeln, aus einer gegebenen Funktion $F(x)$ die entsprechende $f(x)$ abzuleiten und dann die andere, $F(x)$ aus $f(x)$ zu bestimmen, nicht, wie früher, direkt lösen, sondern sie auf die vorhergegangene reduziren. Die beiden verschiedenen Arten von Calcül, welche hieraus entspringen, führen die Namen: Differenzialrechnung und Integralrechnung und verhalten sich ungefähr zu einander wie Subtraktion und Addition. Die Probleme der Integralrechnung sind die direkten, von der Natur der stetigen Grössen unmittelbar gebotenen, ihre Lösungen zeigen uns in der mathematischen Physik den Verlauf der Wirkungen gegebener Ursachen, die Probleme der Differenzialrechnung sind die indirekten aber dafür leichter zu lösenden.

Erste Abtheilung.

Theorie der Differenzialrechnung.

Cap. I. Allgemeine Begriffe und Fundamentalsätze der Differenzialrechnung.

§ 1.

Bezeichnungsweise in der Differenzialrechnung.

Wir können für die Lösung der bereits angedeuteten Hauptaufgabe der Differenzialrechnung: „aus einer gegebenen Funktion $F(x)$ eine andere $f(x)$ der Art abzuleiten, dass

$$f(x) = \text{Lim}\,\frac{F(x+\delta)-F(x)}{\delta}$$

ist“, drei verschiedene Geschäfte des Calcüls unterscheiden; zuvörderst nämlich haben wir der unabhängigen Variablen x einen Zuwachs δ ertheilt, wodurch sich im Allgemeinen der abhängigen Variablen vergrössert oder verringert; hierauf dividiren wir die Aenderung der abhängigen Veränderlichen durch die der unabhängigen und gehen endlich zur Gränze für unausgesetzt abnehmende δ über. Hinsichtlich der letzten dieser Operationen sind nun hauptsächlich zwei Fälle zu unterscheiden. Entweder nämlich lässt sich das δ im Nenner gegen ein möglicherweise im Zähler vorkommendes δ heben und dann muss die Vollführung des Gränzenüberganges zu einer völlig bestimmten Funktion $f(x)$ führen, die selbst stetig und endlich ist, wenn es $F(x)$ war, wie unmittelbar aus der Einleitung hervorgeht, oder man kann oder will auch vielleicht δ nicht gegen ein δ im Zähler heben, in welchem Falle man aber auf eine unmittelbare Angabe der fragl. Lim. selbst verzichten muss, weil sich dieselbe, wenn man wirklich noch δ bis

zur Gränze Null abnehmen lassen wollte, unter der unbestimmten und vieldeutigen Form $\frac{0}{0}$ präsentiren würde. Diese zwei verschiedenen Fälle führen von selbst zu einer doppelten Bezeichnungsweise. Im ersten Falle nennt man die sich ergebende Funktion $f(x)$ die aus $F(x)$ derivirte Funktion und bezeichnet sie mit $F'(x)$. Man hat hiernach z. B. für $F(x) = \frac{1}{3}x^3$

$$F'(x) = \text{Lim}\,\frac{\frac{1}{3}(x+\delta)^3 - \frac{1}{3}x^3}{\delta} = \text{Lim}\,\frac{x^2\delta + x\delta^2 + \frac{1}{3}\delta^3}{\delta}$$
$$= \text{Lim}(x^2 + x\delta + \tfrac{1}{3}\delta^2) = x^2,$$

und etwas verwickelter für $F(x) = \sqrt{a+x}$,

$$F'(x) = \text{Lim}\,\frac{\sqrt{a+x+\delta} - \sqrt{a+x}}{\delta}$$

oder wenn man Zähler und Nenner mit $\sqrt{a+x+\delta} + \sqrt{a+x}$ multiplicirt und den Satz $(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}) = \alpha - \beta$ in Anwendung bringt

$$F'(x) = \text{Lim}\,\frac{(a+x+\delta) - (a+x)}{\delta(\sqrt{a+x+\delta} + \sqrt{a+x})}$$
$$= \text{Lim}\,\frac{1}{\sqrt{a+x+\delta} + \sqrt{a+x}} = \frac{1}{2\sqrt{a+x}}.$$

Wird dagegen, wie der zweite der unterschiedenen Fälle angiebt, in der Formel

$$f(x) = \text{Lim}\,\frac{F(x+\delta) - F(x)}{\delta}$$

das δ des Nenners nicht gegen ein δ im Zähler gehoben, so muss man die Operation des Gränzenüberganges angedeutet lassen, wobei man aber die Bezeichnungsweise etwas einfacher und bequemer machen kann. Zuerst wird es hier darauf ankommen, den Zuwachs oder die Aenderung δ der unabhängigen Variablen so zu bezeichnen, dass man aus dem Symbole selbst erkennen kann, dass es lediglich zu x gehört und nicht etwa den Zuwachs einer anderen Veränderlichen bedeutet. Denn wenn z. B. in einer Funktion mehrere Variable x, y, z vorkämen, von denen x in $x+\delta$, y in $y+\varepsilon$, z in $z+\zeta$ überginge, so würde man das Gedächtniss immer mit der Bemerkung belästigen müssen, dass δ zu x, ε zu y und ζ zu z gehöre. Diesem Uebelstande weicht man dadurch sehr leicht aus, dass man nur einen Buchstaben δ braucht.

ihm aber die Veränderliche, deren Inkrement er bildet, als Marke an hängt. Man würde also statt δ, ε, ζ im vorigen Beispiele jetzt δ_x, δ_y, δ_z schreiben, wobei es übrigens gewöhnlich geworden ist, statt des kleinen δ ein grosses zu brauchen, so dass der Zusammenhang zwischen $f(x)$ und $F(x)$ sich nun in folgender Form darstellen würde:

$$f(x) = \text{Lim}\,\frac{F(x + \Delta_x) - F(x)}{\Delta_x}.$$

So wie aber Δ_x die Aenderung der Variablen x, oder was das Nämliche ist, die Differenz $(x + \Delta x) - x$ bezeichnet, so wird entsprechend $\Delta_{F(x)}$ die Aenderung der Funktion $F(x)$ d. h. die Differenz $F(x + \Delta_x) - F(x)$ bezeichnen müssen, und demnach nimmt die vorige Gleichung die folgende Gestalt an

$$f(x) = \text{Lim}\,\frac{\Delta_{F(x)}}{\Delta_x},$$

worin man Δ_x und $\Delta_{F(x)}$ die Differenzen von x_x und $F(x)$ nennt. Wie nun schon bemerkt worden ist, würde man bei dem Versuche, die durch Lim angedeutete Operation des Gränzenüberganges wirklich auszuführen, auf das vage Resultat $\frac{0}{0}$ kommen, weil $\Delta_{F(x)}$ im Allgemeinen mit Δ_x gleichzeitig bis zur Gränze Null abnimmt. Da hierdurch der Ueberblick über die Entstehungsweise der beiden Nullen gänzlich verloren gehen würde, so pflegt man die unbegränzte Abnahme von Δ_x und $\Delta_{F(x)}$ blos anzudeuten, wobei man sich dahin vereinigt hat, in diesem Falle d für Δ zu schreiben und gleichzeitig die Sylbe Lim, deren beständige Wiederholung sehr lästig werden müsste, wegzulassen. Demnach ist identisch

$$f(x) = \text{Lim}\,\frac{\Delta_{F(x)}}{\Delta_x} = \frac{d_{F(x)}}{d_x}$$

und hierbei nennt man die Grössen d_x und $d_{F(x)}$ die Differenziale von x und $F(x)$. Differenziale sind also Differenzen, auf welchen die Bedingung haftet, sie successiv bis zur Gränze Null abnehmen zu lassen.

Vergleichen wir jetzt die beiden verschiedenen Formen, welche wir für $f(x)$ gefunden haben, so ist

$$\frac{d_{F(x)}}{d_x} = F'(x).$$

Differentialquotient und derivirte Funktion bilden demnach zwei verschiedene Ansichten für eine und die nämliche Sache; den Diffe-

renzialquotienten erhält man dadurch, dass man den Gränzwerth des Differenzenquotienten $\frac{\Delta_{F(x)}}{\Delta_x}$ im Einzelnen andeutet, die derivirte Funktion dagegen, wenn man den fraglichen Gränzwerth im Ganzen wirklich bestimmt. Die obige Gleichung enthält also auf der linken Seite die Aufforderung zur Ausführung einer Operation (der unbegränzten Abnahme von $d_{F(x)}$ und d_x), zugleich aber auf der rechten Seite das Resultat, welches nach Vollendung jener Operation zum Vorschein kommt. Der einfache Sinn einer Gleichung wie

$$\frac{d_{\sqrt{a+x}}}{d_x} = \frac{1}{2\sqrt{a+x}}$$

ist hiernach: das Verhältniss zwischen den Aenderungen des x und den durch sie hervorgerufenen Aenderungen von $\sqrt{a+x}$ nähert sich, wenn die Aenderungen selbst beständig vermindert werden, der Gränze $\frac{1}{2\sqrt{a+x}}$ und zwar bis zu jedem beliebigen Grade der Genauigkeit.

Statt einer solchen Werthangabe des Differenzialquotienten mit Hülfe der derivirten Funktion, schreibt man auch öfter eine sogenannte Differenzialgleichung. Denkt man sich nämlich in der identischen Gleichung

$$\Delta_{F(x)} = \frac{\Delta_{F(x)}}{\Delta_x}\,\Delta_x$$

das Δ_x im Nenner nicht gegen den Faktor Δ_x, sondern gegen ein in $\Delta_{F(x)}$ vorkommendes Δ_x gehoben und geht man jetzt zur Gränze für unbegränzt abnehmende Δ_x über, so ergieht sich

$$\text{Lim}\ \Delta_{F(x)} = F'(x)\,\text{Lim}\ \Delta_x.$$

Hier würde man, weil Lim $\Delta_x = 0$ und ebenso Lim $\Delta_{F(x)} = 0$ ist, auf das Resultat $0 = F'(x).0$ kommen, womit weiter Nichts anzufangen wäre, weil man mit Nullen schlechthin nicht weiter rechnen kann. Um aber wieder die Entstehungsweise dieser Nullen im Auge behalten zu können, führt man die Operation des Gränzenüberganges gar nicht aus, sondern lässt es bei einer blosen Andeutung derselben bewenden, indem man $d_{F(x)}$ und d_x für Lim $\Delta_{F(x)}$ und Lim Δ_x schreibt. Demnach ist der Sinn der Gleichung

$$d_{F(x)} = F'(x)\,d_x,$$

je kleiner ein paar spezielle Werthe der im Zustande beständiger Ab-

nahme begriffenen Grössen $d_{F(x)}$ und d_x sind, desto genauer gilt die obige Relation. Zugleich spricht sich hierin eine der wichtigsten Eigenschaften der sich stetig ändernden Grössen aus, nämlich die, dass man für ein sehr kleines Intervall die Aenderung der abhängigen Veränderlichen der Aenderung der unabhängigen Variablen beinahe proportional setzen kann und zwar um so genauer, je kleiner das Intervall selbst ist, wie wir schon in der Einleitung für den Fall erkannt haben, dass $F(x)$ die Fläche einer Curve und $f(x) = F'(x)$ die begränzende Ordinate derselben bezeichnet.

Zu bemerken ist endlich noch, dass man die Bezeichnung zum praktischen Gebrauche bequemer macht, wenn man die Indices $x, (Fx)$ den Buchstaben $\varDelta$ und d nicht anhängt, sondern sie ihnen in gleicher Linie nebenordnet, also $\varDelta x$, dx, $\varDelta F(x)$ und $dF(x)$ für $\varDelta_x$, d_x $\varDelta_{F(x)}$ und $d_{F(x)}$ schreibt, wobei man sich nur hüten muss, $\varDelta$ und d mit Faktoren zu verwechseln. Die Fundamentalformeln der Differenzialrechnung nehmen dann die folgende Gestalt an

$$\frac{dF(x)}{dx} = \operatorname{Lim} \frac{F(x + \varDelta x) - F(x)}{\varDelta x} = \mathfrak{F}'(x)$$

$$dF(x) = F'(x)\, dx,$$

in welcher wir sie künftig immer brauchen werden.

§ 2.

Allgemeine Regeln zur Differenziation der Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten.

Das Nächste, was uns jetzt obliegt, ist die Aufsuchung allgemeiner Regeln, nach welchen man die Differenziation der aus einfachen Funktionen zusammengesetzten Funktionen auf die Differenziation ihrer Bestandtheile reduziren könnte. So entstehen die Aufgaben: den Differenzialquotienten einer Summe, Differenz, eines Produktes und eines Quotienten zweier oder mehrerer Funktionen durch die Differenzialquotienten der einzelnen Funktionen auszudrücken, deren Lösung durch die nachherigen Betrachtungen erlangt wird. — Zuvor indess noch eine Bemerkung. Differenziation ist nur möglich, wenn man eine veränderliche Grösse dazu voraussetzt; wäre dagegen $F(x)$ einer Constanten A gleich, so hätte man auch $F(x + \varDelta x) = A$, mithin $F(x + \varDelta x) - F(x) = \varDelta F(x) = 0$ gleichviel, wie gross oder klein $\varDelta x$ sein möge.

Es findet daher auch keine Annäherung an eine Gränze Statt, wenn man in den Quotienten $\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}$ das Inkrement Δx ins Unendliche abnehmen lässt und diess durch dx andeutet, sondern es ist schlechtweg

$$\frac{dA}{dx}=0,\quad dA=0dx=0,$$

wovon wir in dem Folgenden mehrmals Gebrauch machen werden.

I. Differenziation der Summen und Differenzen zweier oder mehrerer Funktionen.

Sei $F(x)=\varphi(x)+\psi(x)$, wo $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ beliebig gegeben sind, so ist:

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$$
$$=\frac{[\varphi(x+\Delta x)+\psi(x+\Delta x)]-[\varphi(x)+\psi(x)]}{\Delta x},$$

wofür man auch schreiben kann

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$$
$$=\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}+\frac{\psi(x+\Delta x)-\psi(x)}{\Delta x}.$$

Geht man zur Gränze für unendlich abnehmende Δx über, so entsteht folgende Gleichung zwischen den derivirten Funktionen

$$F'(x)=\varphi'(x)+\psi'(x)$$

oder auch, wenn man statt der derivirten Funktionen die gleichgeltenden Differenzialquotienten setzt,

$$\frac{dF(x)}{dx}=\frac{d\varphi(x)}{dx}+\frac{d\psi(x)}{dx}$$

d. i. vermöge des Werthes von $F(x)$,

$$\frac{d[\varphi(x)+\psi(x)]}{dx}=\frac{d\varphi(x)}{dx}+\frac{d\psi(x)}{dx},\qquad (1)$$

wofür man auch die Differenzialgleichung

$$d[\varphi(x)+\psi(x)]=d\varphi(x)+d\psi(x)\qquad (2)$$

aufstellen kann.

Durch einen völlig analogen Calcül wird man sich leicht von der Richtigkeit der folgenden Relationen überzeugen: für $F(x) = \varphi(x) - \psi(x)$ ist

$$F'(x) = \varphi'(x) - \psi'(x),$$

$$\frac{d[\varphi(x) - \psi(x)]}{dx} = \frac{d\varphi(x)}{dx} - \frac{d\psi(x)}{dx}$$

oder

$$d[\varphi(x) - \psi(x)] = d\varphi(x) - d\psi(x).$$

Aus diesen für die Addition und Subtraktion zweier Funktionen geltenden Regeln kann man sogleich die allgemeinere bilden: wenn $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\chi(x)$, $\omega(x)$ etc. verschiedene Funktionen von x sind und zugleich

$$F(x) = \varphi(x) \pm \psi(x) \pm \chi(x) \pm \omega(x) \pm \ldots \tag{3}$$

ist, so hat man

$$F'(x) = \varphi'(x) \pm \psi'(x) \pm \chi'(x) \pm \omega'(x) \pm \ldots \tag{4}$$

oder

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{d\varphi(x)}{dx} \pm \frac{d\psi(x)}{dx} \pm \frac{d\chi(x)}{dx} \pm \frac{d\omega(x)}{dx} \pm \ldots \tag{5}$$

und auch

$$dF(x) = d\varphi(x) \pm d\psi(x) \pm d\chi(x) \pm d\omega(x) \pm \ldots \tag{6}$$

II. Differenziation von Produkten.

Für $F(x) = \varphi(x)\psi(x)$ hat man

$$\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{\varphi(x+\Delta x)\,\Psi(x+\Delta x) - \varphi(x)\psi(x)}{\Delta x},$$

wofür man auch schreiben kann

$$\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

$$= \varphi(x)\,\frac{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} + \varphi(x+\Delta x)\,\frac{\psi(x+\Delta x) - \psi(x)}{\Delta x}.$$

Lassen wir nun Δx ins Unbegränzte abnehmen, so nähern sich die Ausdrücke

$$\frac{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x},\quad \varphi(x+\Delta x),\quad \frac{\psi(x+\Delta x) - \psi(x)}{\Delta x}$$

den Gränzen

$$\varphi'(x),\quad \varphi(x),\quad \psi'(x)$$

und wir erhalten folglich

$$F'(x) = \psi(x)\,\varphi'(x) + \varphi(x)\,\psi'(x) \tag{7}$$

oder

$$\frac{d[\varphi(x)\,\psi(x)]}{dx} = \psi(x)\frac{d\varphi(x)}{dx} + \varphi(x)\frac{d\psi(x)}{dx}, \tag{8}$$

woraus die Differenzialgleichung entspringt

$$d[\varphi(x)\,\psi(x)] = \psi(x)\,d\varphi(x) + \varphi(x)\,d\psi(x). \tag{9}$$

Als spezieller Fall ist hier die Annahme, einer der Faktoren, etwa $\psi(x)$ sei constant $= a$ bemerkenswerth. Man hat dann wegen $\frac{da}{dx} = 0$,

$$\frac{d[a\varphi(x)]}{dx} = a\,\frac{d\varphi(x)}{dx}$$

und

$$d,[a,\varphi(x)] = a d\varphi(x).$$

Die Gleichung (7) lässt sich noch in eine sehr elegante Form bringen, wenn man beiderseits mit $F(x) = \varphi(x)\,\psi(x)$ dividirt. Man findet dann

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} + \frac{\psi'(x)}{\psi(x)}.$$

Hieraus erhält man leicht, indem man $\psi(x)\;\chi(x)$ für $\psi(x)$, also

$$\frac{\psi'(x)}{\psi(x)} + \frac{\chi'(x)}{\chi(x)} \text{ für } \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} \text{ setzt,}$$

$$F(x) = \varphi(x)\,\psi(x)\,\chi(x)$$
$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} + \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} + \frac{\chi'(x)}{\chi(x)}$$

und ebenso leicht allgemeiner:

$$\left.\begin{array}{c} F(x) = \varphi(x)\,\psi(x)\,\chi(x)\,\omega(x)\ldots. \\ \dfrac{F'(x)}{F(x)} = \dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} + \dfrac{\psi'(x)}{\psi(x)} + \dfrac{\chi'(x)}{\chi(x)} + \dfrac{\omega'(x)}{\omega(x)} + \ldots. \end{array}\right\} \tag{9}$$

wofür man auch schreiben kann:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{\varphi(x)\,\psi(x)\,\chi(x)\,\omega(x)\ldots}\;\dfrac{d[\varphi(x)\,\psi(x)\,\chi(x)\,\omega(x)\ldots}{dx} \\ = \dfrac{1}{\varphi(x)}\dfrac{d\varphi(x)}{dx} + \dfrac{1}{\psi(x)}\dfrac{d\psi(x)}{dx} + \dfrac{1}{\chi(x)}\dfrac{d\chi(x)}{dx} + \dfrac{1}{\omega(x)}\dfrac{d\omega(x)}{dx} + \ldots \end{array}\right\} \text{10)}$$

III. Differenziation der Quotienten.

Für $F(x)=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ wird

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\frac{\frac{\varphi(x+\Delta x)}{\psi(x+\Delta x)}-\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}}{\Delta x}=\frac{\frac{\varphi(x+\Delta x)\psi(x)-\psi(x+\Delta x)\varphi(x)}{\psi(x+\Delta x)\psi(x)}}{\Delta x},$$

woraus man leicht findet

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\frac{\psi(x)\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}-\varphi(x)\frac{\psi(x+\Delta x)-\psi(x)}{\Delta x}}{\psi(x+\Delta x)\psi(x)}.$$

Durch Uebergang zur Gränze für unendlich abnehmende Δx ergiebt sich hieraus

$$F'(x)=\frac{\psi(x)\varphi'(x)-\varphi(x)\psi'(x)}{[\psi(x)]^2},\tag{11}$$

wofür man auch schreiben kann

$$\frac{d\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}}{dx}=\frac{\psi(x)\frac{d\varphi(x)}{dx}-\varphi(x)\frac{d\psi(x)}{dx}}{[\psi(x)]^2}\tag{12}$$

und die Differenzialgleichung

$$d\,\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\psi(x)\,d\varphi(x)-\varphi(x)\,d\psi(x)}{[\psi(x)]^2}.\tag{13}$$

Man wird hier eine gewisse Analogie der Formeln (11), (12) und (13) mit denen unter (7), (8) und (9) bemerken und in der That kann man auch die einen aus den anderen ableiten. Um z. B. die Formel (11) mit Hülfe der in (7) gefundenen zu entwickeln, beachte man, dass aus der Gleichung $F(x)=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ folgt $\varphi(x)=F(x)\,\psi(x)$. Nach der Regel für die Differenziation der Produkte ist dann

$$\varphi'(x)=\psi(x)\,F'(x)+F(x)\,\psi'(x),$$

woraus folgt

$$F'(x)=\frac{\varphi'(x)-F(x)\,\psi'(x)}{\psi(x)}$$

und vermöge des Werthes von $F(x)$

$$F(x) = \frac{\psi(x)\varphi'(x) - \varphi(x)\psi'(x)}{[\psi(x)]^2}$$

übereinstimmend mit dem Vorigen.

Als specieller Fall ist die Annahme $\varphi(x) = a$ von Interesse. Man hat dann

$$F'(x) = \frac{-a\psi'(x)}{[\psi(x)]^2}$$

und

$$d\frac{a}{\psi(x)} = -a\frac{d\psi(x)}{[\psi(x)]^2}.$$

Cap. II. Differenzialformeln für die einfachen Funktionen.

§ 3.

Vorbemerkungen.

Die einfachen Funktionen, mit deren Differenzialen wir uns jetzt beschäftigen wollen, sind dieselben, welche in der algebraischen Analysis unter anderen Gesichtspunkten betrachtet werden. Die Resultate, welche man dort erhalten hat, werden uns hier die wichtigsten Dienste leisten und namentlich sind es die verschiedenen Sätze über die Gränzwerthe mancher Funktionen, welche wir für unsere weitere Betrachtungen ganz besonders in Anspruch nehmen müssen, weil jeder Uebergang von einer Funktion zu ihrer Derivirten eine Gränzenbetrachtung erfordert. So werden die aus der Einleitung bekannten Gleichungen

$$\text{Lim}\frac{a^\delta - 1}{\delta} = la, \qquad (1)$$

$$\text{Lim}\,(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}} = e \qquad (2)$$

$$\text{Lim}\frac{\sin\delta}{\delta} = 1 \qquad (3)$$

$$\text{Lim}\frac{\text{Arcsin}\,\delta}{\delta} = 1 \qquad (4)$$

$$\text{Lim}\frac{\text{Arctan}\,\delta}{\delta} = 1 \qquad (5)$$

für uns die Fundamentalformeln des ganzen Capitels. Zu bemerken ist noch, dass sich aus ihnen einige anderweite Theoreme ähnlicher Art ableiten lassen, von denen wir ebenfalls Gebrauch machen werden.

Setzt man nämlich in no. (1) $a = e^\mu$, so wird

$$\operatorname{Lim} \frac{e^{\mu\delta}-1}{\delta} = \mu.$$

Dabei steht es noch frei, nach welchem Verhältnisse man δ will abnehmen lassen, vorausgesetzt, dass man es jedenfalls der Null so nahe bringen kann, als es nur verlangt wird. Ist nun δ' eine ebenfalls bis zur Gränze Null abnehmende Grösse, so hindert nichts, $\delta = l(1+\delta')$ zu nehmen, wodurch die einzige dem δ auferlegte Bedingung erfüllt ist. Es wird dann

$$e^{\mu\delta} = (e^\delta)^\mu = [e^{l(1+\delta')}]^\mu = (1+\delta')^\mu,$$

folglich

$$\operatorname{Lim} \frac{(1+\delta')^\mu - 1}{l(1+\delta')} = \mu. \tag{6}$$

Hieraus folgt z. B., wenn man das ganz beliebige $\mu = 1$ nimmt,

$$\operatorname{Lim} \frac{\delta'}{l(1+\delta')} = 1 \tag{7}$$

und auch

$$\operatorname{Lim} \frac{l(1+\delta')}{\delta'} = 1. \tag{8}$$

Mit Hülfe der Formel (7) kann man aus no. (6) wieder ein neues Theorem ableiten, indem man die Grösse $l(1+\delta')$ aus beiden Gleichungen eliminirt.

Da nämlich

$$\frac{(1+\delta')^\mu - 1}{l(1+\delta')} = \frac{(1+\delta')^\mu - 1}{\delta'} \cdot \frac{\delta'}{l(1+\delta')}$$

ist, so hat man nach (6)

$$\operatorname{Lim} \frac{(1+\delta')^\mu - 1}{l(1+\delta')}$$

$$= \operatorname{Lim} \frac{(1+\delta')^\mu - 1}{\delta'} . \operatorname{Lim} \frac{\delta'}{l(1+\delta')} = \operatorname{Lim} \frac{(1+\delta')^\mu - 1}{\delta'}$$

und da man nach (6) den Werth der linken Seite schon weiss

$$\operatorname{Lim} \frac{(1+\delta')^\mu - 1}{\delta'} = \mu \tag{9}$$

gültig für jedes beliebige μ.

§ 4.

Differenzialformeln für die Potenz, die Exponenzialgrösse und den Logarithmus.

I. Sei zuvörderst $F(x) = x^\mu$, wobei μ eine beliebige reelle Grösse bedeutet; man hat dann

$$\frac{F.x(+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^\mu - x^\mu}{\Delta x}$$

$$= [(1 + \frac{\Delta x}{\Delta})^\mu - 1] \frac{x^\mu}{\Delta x}$$

oder wenn zur Abkürzung $\frac{\Delta x}{x} = \delta'$ gesetzt wird, woraus $\Delta x = x\delta'$ folgt

$$\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{(1+\delta')^\mu - 1}{\delta'} x^{\mu - 1}.$$

Lassen wir nun Δx der Gränze Null zueilen, so nimmt auch $\frac{\Delta x}{x} = \delta'$ ins Unendliche ab und es ergiebt sich unter Anwendung des Satzes (9) im vorigen Paragraphen,

$$F'(x) = \mu x^{\mu - 1}$$

oder

$$\frac{d(x^\mu)}{dx} = \mu x^{\mu - 1},\ d(x^\mu) = \mu x^{\mu - 1}\ dx. \qquad (1)\ ^{*})$$

---

*) Man könnte auch auf ganz anderem Wege ohne Kenntniss des Theoremes (9) zu dem nämlichen Resultate gelangen.

Es sei nämlich in dem allgemeinen Satze (10) in § 2,

$$\varphi(x) = x^\alpha,\ \psi(x) = x^\beta,\ \chi(x) = x^\gamma, \text{ etc.},$$

so ist

$$\frac{1}{x^\alpha . x^\beta . x^\gamma \ldots} \cdot \frac{d[x^\alpha . x^\beta . x^\gamma \ldots]}{dx}$$

$$= \frac{1}{x^\alpha} \cdot \frac{d(x^\alpha)}{dx} + \frac{1}{x^\beta} \cdot \frac{d(x^\beta)}{dx} + \frac{1}{x^\gamma} \cdot \frac{d(x^\gamma)}{dx} + \ldots$$

Wird nun überhaupt die Funktion

II. Für die Differenziation der Exponenzialgrösse sei $F(x) = a^x$. Es folgt daraus

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=a^x\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}.$$

Lassen wir Δx ins Unendliche abnehmen und wenden das Theorem (I) in § 3 für $\delta=\Delta x$ an, so erhalten wir

$$F'(x) = a^x la$$

oder

$$\frac{d(a^x)}{dx} = a^x la, \quad d(a^x) = a^x la\, dx. \qquad (2)$$

III. Sei $F(x) = \log x$, wobei die Basis des logarithmischen Systems eine beliebige ist. Man hat dann:

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\frac{\log(x+\Delta x)-\log x}{\Delta x}$$

$$=\frac{\log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}.$$

$$\frac{1}{x^\mu}\cdot\frac{d(x^\mu)}{dx}$$

mit $f(\mu)$ bezeichnet, so geht die rechte Seite der vorigen Gleichung in $f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)+\ldots$ über. Aber auch die linke Seite derselben ist durch die Funktion f ausdrückbar; sie ist nämlich

$$\frac{1}{x^{\alpha+\beta+\gamma+\ldots}}\frac{d[x^{\alpha+\beta+\gamma+\ldots}]}{dx}=f(\alpha+\beta+\ldots)$$

und durch Vergleichung mit dem Vorigen ergiebt sich nun folgende Eigenschaft der Funktion f,

$$f(\alpha+\beta+\gamma+\ldots)=f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)+\ldots$$

Hieraus lässt sich die Natur derselben bestimmen; es ist nämlich nach einem bekannten Theoreme:

$$f(\mu)=\mu f(1)$$

folglich hier vermöge der Bedeutung von $f(\mu)$

$$\frac{1}{x^\mu}\frac{d(x^\mu)}{dx}=\mu\frac{1}{x}\frac{d(x^1)}{dx}=\mu\frac{1}{x}$$

oder

$$\frac{d(x^\mu)}{dx}=\mu x^{\mu-1}$$

wie vorher.

Für $\frac{\Delta x}{x} = \delta$, also $\Delta x = x\delta$ ergiebt sich hieraus

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$$

$$= \frac{\log(1+\delta)}{x\delta} = \frac{1}{x}\log\left[(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}}\right].$$

Lassen wir nun Δx unbegränzt abnehmen, so vermindert sich auch $\frac{\Delta x}{x} = \delta$ ebenso unbegränzt und wir erhalten demnach unter Anwendung des Theoremes (2) in § 3

$$F'(x) = \frac{1}{x}\log e$$

oder

$$\frac{d\log x}{dx} = \frac{\log e}{x},\ d\log x = \frac{\log e}{x}\,dx. \qquad (3)$$

Statt des künstlichen Logarithmus der Basis des natürlichen Systemes kann man auch leicht den natürlichen Logarithmus der Basis des hier vorkommenden künstlichen Systemes einführen, wenn man bemerkt, dass für b als Basis der mit log bezeichneten künstlichen Logarithmen

$$b^{\log e} = e$$

ist, woraus dadurch, dass man beiderseits die natürlichen Logarithmen nimmt, folgt

$$\log e\, lb = le = 1,$$

mithin

$$\log e = \frac{1}{lb},$$

wobei man $\frac{1}{lb}$ bekanntlich den Modulus des künstlichen Systemes genannt hat. Für

$$\frac{1}{lb} = M \qquad (4)$$

ist dann nach (3)

$$\frac{d\log x}{dx} = \frac{M}{x}\,d\log x = \frac{M}{x}\,dx \quad (\text{bas}\,b), \qquad (5).$$

Sind die Logarithmen natürliche, so hat man $b = e$, $M = \frac{1}{le} = 1$ und folglich die Gleichungen

$$\frac{dlx}{dx} = \frac{1}{x},\ \ dlx = \frac{1}{x}\,ax,$$

welche vielfach gebraucht werden.

§ 5.

Differenzialformeln für die goniometrischen Funktionen.

I. Setzen wir $F(x) = \sin x$, so wird

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}$$

und durch Anwendung der bekannten goniometrischen Relation

$$\sin a-\sin b=2\sin\tfrac{1}{2}(a-b)\cos\tfrac{1}{2}(a+b)$$

für $a=x+\Delta x,\ b=x,$

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\frac{2\sin\frac{1}{2}\Delta x\cos(x+\frac{1}{2}\Delta x)}{\Delta x}$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x}\cos(x+\tfrac{1}{2}\Delta x)$$

und wenn wir $\frac{1}{2}\Delta x=\delta$ setzen

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\frac{\sin\delta}{\delta}\cos(x+\delta).$$

Gehen wir zur Gränze für unendlich abnehmende Δx über und bemerken, dass δ mit Δx gleichzeitig bis zur Gränze Null abnimmt, so bekommen wir unter Anwendung des Theoremes (3) in § 3,

$$F'(x)=\cos x,$$

mithin

$$\frac{d\sin x}{dx}=\cos x,\quad d\sin x=\cos x\,dx \tag{1}$$

II. Ist ferner $F(x)=\cos x$, so wird

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}$$

und unter Anwendung der Formel

$$\cos a-\cos b=-2\sin\tfrac{1}{2}(a-b)\sin\tfrac{1}{2}(a+b)$$

für $a=x+\Delta x,\ b=x,$

$$\frac{F(x+\Delta x)F-(x)}{\Delta x}=-\frac{2\sin\frac{1}{2}\Delta x\sin(x+\frac{1}{2}\Delta x)}{\Delta x}$$

$$=-\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x}\sin(x+\tfrac{1}{2}\Delta x)$$

$$=-\frac{\sin\delta}{\delta}\sin(x+\delta)$$

wenn wir wieder $\frac{1}{2}\Delta x = \delta$ setzen. Hieraus folgt durch Uebergang zur Gränze für unendlich abnehmende Δx und δ,

$$F'(x) = -\sin x$$

oder

$$\frac{d\cos x}{dx} = -\sin x, \quad d\cos x = -\sin x\, dx. \qquad (2)$$

III. Es hat nun auch keine Schwierigkeit, die Differenzialformeln für die Tangente und Cotangente zu entwickeln. Denn für $F(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ lässt sich die allgemeine Regel

$$\text{wenn } F(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

ist

$$F'(x) = \frac{\psi(x)\varphi'(x) - \varphi(x)\psi'(x)}{[\psi(x)]^2}$$

in Anwendung bringen, sobald man $\varphi(x) = \sin x$, $\psi(x) = \cos x$ setzt, woraus nach I und II $\varphi'(x) = \cos x$, $\psi'(x) = -\sin x$ folgt. Man hat also

$$F'(x) = \frac{\cos x \cos x + \sin x \sin x}{(\cos x)^2} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

oder

$$\frac{d\tan x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad d\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}\,dx. \qquad (3)$$

Ebenso leicht erhält man für $F(x) = \cot x$, $\varphi(x) = \cos x$, $\psi(x) = \sin x$, also $\varphi'(x) = -\cos x$, $\psi'(x) = \sin x$,

$$F'(x) = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{(\sin x)^2} = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

oder

$$\frac{d\cot x}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad d\cot x = -\frac{1}{\sin^2 x}\,dx \qquad (4)$$

IV. Auch die Differenzialquotienten von $\sec x$ und $\operatorname{cosec} x$ lassen sich auf ähnliche Weise entwickeln, wenn man die allgemeine Regel

$$\text{für } F(x) = \frac{1}{\psi(x)}$$

$$\text{ist } F'(x) = -\frac{\psi'(x)}{[\psi(x)]^2}$$

in Anwendung bringt.

Für $\psi(x) = \cos x$, also $\psi'(x) = -\sin x$ und $F(x) = \sec x$ ergiebt sich aus derselben

$$F'(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

oder

$$\frac{d \sec x}{dx} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}, \; d \sec x = \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx. \qquad (5)$$

Ebenso erhält man für $\psi(x) = \sin x$ also $\psi'(x) = \cos x$ und $F(x) = \operatorname{cosec} x$,

$$F'(x) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

oder

$$\frac{d \operatorname{cosec} x}{dx} = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}, \; d \operatorname{cosec} x = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} dx. \qquad (6)$$

§ 6.

Differenzialformeln für die cyklometrischen Funktionen.

I. Soll die Funktion $F(x) = \operatorname{Arcsin} x$ differenzirt werden, so hat man

$$\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{\operatorname{Arcsin}(x+\Delta x) - \operatorname{Arcsin} x}{\Delta x}$$

und mit Hülfe der Formel *)

$$\operatorname{Arcsin} a - \operatorname{Arcsin} b = \operatorname{Arcsin} (a\sqrt{1-b^2} - b\sqrt{1-a^2})$$

für $a = x + \Delta x$, $b = x$,

$$\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{\operatorname{Arcsin}\left[(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}\right]}{\Delta x}.$$

*) Ihre Ableitung ist kurz folgende. Sind u und v zwei spitze Bögen und $\sin u = a$, $\sin v = b$, so folgt $\cos u = \sqrt{1-a^2}$, $\cos v = \sqrt{1-b^2}$ und hierdurch geht die bekannte goniometrische Formel

$$\sin(u-v) = \sin u \cos v - \sin v \cos u$$

über in

$$\sin(u-v) = a\sqrt{1-b^2} - b\sqrt{1-a^2}$$

oder weil $u-v$ ein spitzer Bogen ist,

$$u - v = \operatorname{Arcsin}(a\sqrt{1-b^2} - b\sqrt{1-a^2}).$$

Aus $\sin u = a$, $\sin v = b$ folgt aber, da u und v als Bögen des ersten Quadranten vorausgesetzt wurden, $u = \operatorname{Arcsin} a$, $v = \operatorname{Arcsin} b$ und durch Substitution dieser Werthe erhält man jetzt unmittelbar die citirte Formel.

Setzen wir zur Abkürzung

$$(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}=\delta,$$

so haben wir auch

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\frac{\operatorname{Arcsin}\delta}{\delta}\cdot\frac{(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}}{\Delta x},$$

was sich durch Multiplikation des Zählers und Nenners rechts mit

$$(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}$$

folgendermassen gestaltet:

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\frac{\operatorname{Arcsin}\delta}{\delta}\cdot\frac{(x+\Delta x)^2(1-x^2)-x^2[1-(x+\Delta x)^2]}{\Delta x[(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}]}$$

oder endlich, weil der Zähler gleich

$$(x+\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+(\Delta x)^2$$

ist, auch

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\frac{\operatorname{Arcsin}\delta}{\delta}\cdot\frac{2x+\Delta x}{(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}}.$$

Lassen wir jetzt Δx unbegränzt abnehmen, so vermindert sich auch δ ins Unendliche hinab, wie man aus der Bedeutung von δ augenblicklich erkennen wird. Unter Anwendung des Theoremes (4) in § 3 und unter der Bemerkung, dass

$$\operatorname{Lim}(2x+\Delta x)=2x$$

$$\operatorname{Lim}[(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}]=2x\sqrt{1-x^2}$$

ist, folgt jetzt

$$F'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

mithin

$$\frac{d\operatorname{Arcsin}x}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad d\operatorname{Arcsin}x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx. \qquad (1)$$

Man könnte ein ähnliches Verfahren für die Differenziation von Arccos anwenden, gelangt aber kürzer zum Ziele, wenn man die aus der geometrischen Bedeutung von Arcsin x und Arccos x sich unmittelbar ergebende Gleichung

$$\operatorname{Arccos}x=\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arcsin}x$$

differenziirt. Man erhält nämlich

$$\frac{d\,\mathrm{Arccos}\,x}{dx} = -\frac{d\,\mathrm{Arcsin}\,x}{dx},\; d\,\mathrm{Arccos}\,x = -d\,\mathrm{Arcsin}\,x$$

oder

$$\frac{d\,\mathrm{Arccos}\,x}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\; d\,\mathrm{Arccos}\,x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx. \quad (2)$$

II. Sei ferner $F(x) = \mathrm{Arctan}\,x$; man hat dann mit Benutzung der Relation *)

$$\mathrm{Arctan}\,a - \mathrm{Arctan}\,b = \mathrm{Arctan}\,\frac{a-b}{1+ab}$$

die folgenden Gleichungen

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = \frac{\mathrm{Arctan}\,(x+\Delta x) - \mathrm{Arctan}\,x}{\Delta x}$$

$$= \frac{\mathrm{Arctan}\,\dfrac{\Delta x}{1+x(x+\Delta x)}}{\Delta x}$$

und wenn man zur Abkürzung

$$\frac{\Delta x}{1+x(x+\Delta x)} = \delta$$

setzt, auch

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = \frac{\mathrm{Arctan}\,\delta}{\delta} \cdot \frac{\dfrac{\Delta x}{1+x(x+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$= \frac{\mathrm{Arctan}\,\delta}{\delta} \cdot \frac{1}{1+x(x+\Delta x)}.$$

Nimmt nun Δx ins Unendliche ab, so vermindert sich auch δ ins Unendliche und es ergiebt sich unter Anwendung des Theorems (5) in § 3,

---

*) Wenn nämlich u und v ein paar Bögen des ersten Quadranten bedeuten und $\tan u = a$, $\tan v = b$ gesetzt wird, so verwandelt sich die goniometrische Formel

$$\tan(u-v) = \frac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \tan v}$$

in

$$\tan(u-v) = \frac{a-b}{1+ab}$$

oder weil $u-v$ ebenfalls im ersten Quadranten liegt,

$$u - v = \mathrm{Arctan}\,\frac{a-b}{1+ab}.$$

Aus $\tan u = a$, $\tan v = b$ folgt aber nach den gemachten Voraussetzungen $u = \mathrm{Arctan}\,a$, $v = \mathrm{Arctan}\,b$ und hierdurch geht die vorige Formel in die oben angegebene über.

$$F'(x) - \frac{1}{1+x^2}$$

oder

$$\frac{d\,\mathrm{Arctan}\,x}{dx} = \frac{1}{1+x^2}, \quad \mathrm{Arctan}\,x = \frac{1}{1+x^2}\,dx. \tag{3}$$

Die Differenzialformeln für Arccot x erhält man hieraus durch Differenziation der leicht zu entwickelnden Gleichung

$$\mathrm{Arccot}\,x = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\,x.$$

Man findet nämlich

$$\frac{d\,\mathrm{Arcot}\,x}{dx} = -\frac{d\,\mathrm{Arctan}\,x}{dx}, \quad d\,\mathrm{Arccot}\,x = -\,d\,\mathrm{Arctan}\,x$$

oder

$$\frac{d\,\mathrm{Arccot}\,x}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}, \quad d\,\mathrm{Arccot}\,x = -\frac{1}{1+x^2}\,dx. \tag{4}$$

Durch die in den Paragraphen (4), (5) und (6) entwickelten Formeln ist jetzt die Aufgabe, alle aus der algebraischen Analysis bekannten einfachen Funktionen der Operation des Differenzirens zu unterwerfen, vollständig gelöst.

Cap. III. Differenziation zusammengesetzter Ausdrücke und der Funktionen mehrerer Variabelen.

§ 7.

Differenziation zusammengesetzter Funktionen.

Nimmt man mit einer unabhängigen veränderlichen Grösse irgend eine Rechnungsoperation vor und dann mit dem, was auf diese Weise herauskommt (der abhängigen Variabelen) wieder eine neue Rechnungsoperation, so erhält man die Funktion einer Funktion und man kann diess auf folgende Weise bezeichnen:

$$F(x) = f[\varphi(x)], \tag{1}$$

wobei φ und f die nach einander vorzunehmenden Operationen, $F(x)$ das Gesammtresultat andeutet. Auf diese Weise zusammengesetzte Funktionen sind z. B.

$$e^{\sin x}\ ,\ \log \sin x\ ,\ \text{Arctan}\,(x^{\mu})\ \text{etc.}$$

und mit ihrer Differenziation hätten wir uns jetzt zu beschäftigen.

Setzen wir in (1) zur Abkürzung

$$y = \varphi(x), \tag{2}$$

so wird

$$F(x) = f(y). \tag{3}$$

Wenn nun x den Zuwachs Δx erhält, so nimmt $\varphi(x)$ um $\Delta\varphi(x)$ d. h. y um Δy zu und wir haben aus (3)

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = \frac{f(y+\Delta y)-f(y)}{\Delta x}.$$

Erinnern wir uns aber, dass $\Delta y = \Delta\varphi(x) = \varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)$ ist, so können wir die vorstehende Gleichung durch Zusetzung des Faktors

$$\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta y} = 1$$

auch in folgender Form darstellen:

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = \frac{f(y+\Delta y)-f(y)}{\Delta y} \cdot \frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}. \tag{4}$$

Lassen wir nun Δx bis zur Gränze Null abnehmen, so vermindert sich auch Δy ins Unendliche hinab; dabei nähert sich offenbar der Quotient

$$\frac{f(y+\Delta y)-f(y)}{\Delta y}$$

der Gränze $f'(y)$ gerade so, als wäre Δy eine von x unabhängige abnehmende Grösse. Denn um von einer Funktion auf ihre Derivirte zu kommen, ist es nach der Definition der letzteren blos nöthig, dass man in dem Aenderungenquotienten die Aenderung der Veränderlichen der Funktion bis zur Gränze Null abnehmen lässt, gleichviel w i e d. h. nach welchem Gesetze diese Abnahme geschieht; es kommt daher auch nichts darauf an, ob dieses Gesetz selbst durch andere Umstände (oben durch x) bestimmt ist, oder nicht. Nach dieser Bemerkung folgt jetzt aus no. (4) durch Uebergang zur Gränze für unendlich abnehmende Δx (und Δy)

$$F'(x) = f'(y)\,\varphi'(x) \tag{5}$$

oder was das Nämliche ist,

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{df(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \tag{6}$$

und ebenso die Differenzialgleichung

$$dF(x) = f'(y).\varphi'(x)\,dx \tag{7}$$

oder

$$dF(x) = \frac{df(y)}{dy}.\frac{dy}{dx}\,dx, \tag{8}$$

wobei man noch für y seinen Werth zu setzen hat. Man kann hieraus die folgende praktische Regel bilden. „Um einen Ausdruck wie

$$F(x) = f[\varphi(x)]$$

zu differenziren, setze man erst $\varphi(x) = y$ und differenzire jetzt nach y, als wäre diese Grösse die unabhängige Veränderliche. Nach geschehener Differenziation substituire man für y seinen ursprünglichen Werth und für $\frac{dy}{dx}$ oder dy das, was man durch Differenziation der Gleichung $y = \varphi(x)$ nach x bekommt."

Wie leicht die Anwendung dieser Regel ist, werden die folgenden Beispiele zeigen.

I. Wenn $F(x) = \log\sin x$ ist, setze man $y = \varphi(x) = \sin x$, $f(y) = \log y$, man hat dann nach (5)

$$f'(y) = \frac{M}{y},\ \varphi'(x) = \cos x$$

folglich

$$F'(x) = \frac{M}{y}\cos x = \frac{M}{\sin x}\cos x = M\cot x$$

oder

$$\frac{d\log\sin x}{dx} = M\cot x$$

und folglich

$$d\log\sin x = M\cot x\ dx.$$

Praktisch kürzer, ohne Benutzung der Zeichen F, f, φ kann man so verfahren. Es sei $\sin x = y$; man hat dann

$$d\log\sin x = d\log y = \frac{Mdy}{y}$$

und weil aus $y = \sin x$ folgt, $dy = \cos x\ dx$

$$d\log\sin x = M\frac{\cos x}{y}dx = M\cot x\,dx. \tag{9}$$

II. Um $\log\cos x$ zu differenziren, sei $\cos x = y$; man findet dann

$$d\log\cos x = d\log y = \frac{M\,dy}{y}$$

und weil aus $y = \cos x$ folgt, $dy = -\sin x\,dx$,

$$d\log\cos x = -\frac{M\sin x}{y}\,dx = -M\tan x\,dx. \qquad (10)$$

Man hat auch oft Gelegenheit, diese Regel mit den in § 2 entwickelten Gesetzen zugleich anzuwenden. Z. B.

III. Soll man $(a+bx^n)^\mu$ differenziren, so setze man

$$y = a + bx^n$$

so ist

$$d[(a+bx^n)^\mu] = d[y^\mu] = \mu y^{\mu-1}dy$$

Aus der vorhergehenden Gleichung folgt aber

$$\begin{aligned} dy &= da + d(bx^n) \\ &= 0 + bd(x^n) \\ &= bnx^{n-1}dx \end{aligned}$$

folglich ist jetzt

$$d[(a+bx^n)^\mu] = \mu nb\,y^{\mu-1}x^{n-1}dx,$$

oder vermöge des Werthes von y,

$$d[(a+bx^n)^\mu] = \mu nb\,(a+bx^n)^{\mu-1}x^{n-1}dx. \qquad (11)$$

Als specieller Fall ist von Interesse $n = 2$, $\mu = \frac{1}{2}$, mithin

$$d\sqrt{a+bx^2} = \frac{bx}{\sqrt{a+bx^2}}\,dx. \qquad (12)$$

IV. Um den Ausdruck $l(\sqrt{b}x + \sqrt{a+bx^2})$, in welchem a und b als positiv vorausgesetzt werden, zu differenziren sei

$$y = \sqrt{b}\,x + \sqrt{a+bx^2}. \qquad (13)$$

Man hat dann

$$dl(\sqrt{b}x + \sqrt{a+bx^2}) = dly = \frac{dy}{y}. \qquad (14)$$

Andererseits ist

$$dy = d\sqrt{b}\,x + d\sqrt{a+bx^2}$$

oder nach (12)

$$\begin{aligned} dy &= \sqrt{b}\,dx + \frac{bx}{\sqrt{a+bx^2}}\,dx \\ &= \left(1 + \frac{\sqrt{b}\,x}{\sqrt{a+bx^2}}\right)\sqrt{b}\,dx \end{aligned}$$

und durch Reduktion auf gleichen Nenner

$$dy = \frac{\sqrt{a+bx^2}+\sqrt{b}\,x}{\sqrt{a+bx^2}}\sqrt{b}\,dx.$$

Substituiren wir nun die vorstehende Gleichung und die unter no. (13) in no. (14), so ergiebt sich

$$dl(\sqrt{b}\,x+\sqrt{a+bx^2}) = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a+bx^2}}\,dx \qquad (15)$$

ein durch die Einfachheit der derivirten Funktion ausgezeichnetes Resultat.

V. Für die Differenziation des Ausdrucks $l\left(\frac{a+bx}{a-bx}\right)$ sei wieder

$$y = \frac{a+bx}{a-bx}. \qquad (16)$$

Es ist dann

$$dl\left(\frac{a+bx}{a-bx}\right) = dly = \frac{dy}{y}. \qquad (17)$$

Aus no. (16) findet sich nun unter Anwendung des Theorems (13) in § 2

$$dy = \frac{(a-bx)\,d(a+bx)-(a+bx)\,d(a-bx)}{(a-bx)^2}$$

$$= \frac{(a-bx)\,b\,dx+(a+bx)\,b\,dx}{(a-bx)^2}$$

$$= \frac{2ab\,dx}{(a-bx)^2}.$$

Hiernach und vermöge der Bedeutung von y erhält man aus (17)

$$dl\left(\frac{a+bx}{a-bx}\right) = \frac{2ab\,dx}{(a-bx)^2} : \frac{a+bx}{a-bx}$$

$$= \frac{2ab\,dx}{a-bx} : (a+bx)$$

oder

$$dl\left(\frac{a+bx}{a-bx}\right) = \frac{2ab}{a^2-b^2x^2}\,dx. \qquad (18)$$

Schreibt man $\sqrt{a}$ und $\sqrt{b}$ für a und b, so ist auch

$$dl\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}\,x}{\sqrt{a}-\sqrt{b}\,x}\right) = \frac{2\sqrt{ab}}{a-bx^2}\,dx. \qquad (19)$$

VI. Bemerkenswerth sind noch die Formeln, welche man durch

Differenziation von Arcsin $\frac{b}{a}x$ und Arctan $\frac{b}{a}$ erhält. Nimmt man in jedem Falle $\frac{b}{a}x = y$, so wird

$$d\,\mathrm{Arcsin}\,\frac{b}{a}x = d\,\mathrm{Arcsin}\,y = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$d\,\mathrm{Arctan}\,\frac{b}{a}x = d\,\mathrm{Arctan}\,y = \frac{dy}{1+y^2}.$$

Substituirt man für y seinen Werth und bemerkt, dass $dy = \frac{b}{a}dx$ ist, so ergiebt sich

$$d\,\mathrm{Arcsin}\,\frac{b}{a}x = \frac{b}{a\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}x^2}}\,dx$$

$$d\mathrm{Arctan}\,\frac{b}{a}x = \frac{b}{a\,1+\frac{b^2}{a^2}x^2}\,dx$$

oder

$$d\,\mathrm{Arcsin}\,\frac{b}{a}x = \frac{b}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}\,dx \qquad (20)$$

$$d\,\mathrm{Arctan}\,\frac{b}{a}x = \frac{ab}{a^2+b^2x^2}\,dx. \qquad (21)$$

Setzt man noch $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ für a und b, so ist auch

$$d\,\mathrm{Arcsin}\sqrt{\frac{b}{a}}x = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a-bx^2}}\,dx \qquad (22)$$

$$d\,\mathrm{Arctan}\sqrt{\frac{b}{a}}x = \frac{\sqrt{ab}}{a+bx^2}\,dx, \qquad (23)$$

wo nun a und b nothwendig positiv sein müssen, weil sie die Stellvertreter der früheren a^2 und b^2 sind, welche niemals negativ sein können.

Die Gleichungen (15) und (22), (19) und (23) stehen in einer besonderen Beziehung zu einander, welche wir bald näher kennen lernen werden.

§ 8.

Differenziation der Funktionen mehrerer abhängigen Variabelen.

In ähnlicher Weise, wie wir vorhin die Frage nach der Differenzialformel für $f(y)$, wo y wieder eine Funktion von x ist, beant-

wortet haben, können wir auch die Frage erledigen, nach welchem Gesetze sich die Differenzialformeln für eine Funktion zweier Veränderlichen $f(y, z)$ bilden, vorausgesetzt, dass diese beiden Veränderlichen von einer dritten unabhängigen Variabelen x abhängen, dass also etwa $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$ ist. Sei nun

$$f(y,z) = f[\varphi(x), \psi(x)] = F(x). \tag{1}$$

Aendert sich nun x um das Increment Δx, so ändern sich $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ um $\Delta\varphi(x)$ und $\Delta\psi(x)$ d. h. y und z und Δy und Δz; man findet hiernach leicht

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = \frac{f(y+\Delta y, z+\Delta z)-f(y, z)}{\Delta x},$$

wofür man durch Zusatz des Ausdrucks

$$f(y+\Delta y, z) - f(y+\Delta y, z)$$

im Zähler auch schreiben kann

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$$
$$= \frac{f(y+\Delta y, z)-f(y, z)}{\Delta x} + \frac{f(y+\Delta y, z+\Delta z) - f(y+\Delta y, z)}{\Delta x}.$$

Setzt man noch in den einzelnen Gliedern die Faktoren

$$\frac{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}{\Delta y} = 1, \quad \frac{\psi(x+\Delta x) - \psi(x)}{\Delta z} = 1$$

zu, so nimmt die vorige Gleichung folgende Form an:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} \\ &= \frac{f(y+\Delta y, z)-f(y, z)}{\Delta y} \cdot \frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x} \\ &- \frac{f(y+\Delta y, z+\Delta z)-f(y+\Delta y, z)}{\Delta z} \cdot \frac{\psi(x+\Delta x)-\psi(x)}{\Delta x}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Lassen wir nun Δx unbegränzt abnehmen, vermindern also auch Δy und Δz ins Unendliche hinab, so nähert sich der Quotient

$$\frac{f(y+\Delta y, z)-f(y, z)}{\Delta y}$$

derjenigen derivirten Funktion, welche man erhält, wenn man y als einzige unabhängige Variabele, z aber in Bezug auf die Aenderungen des y als constant ansieht. Wir wollen diese derivirte Funktion mit

$f'(y)$ bezeichnen und dabei durch die Weglassung des z andeuten, dass man bei dem Uebergange von $f(y, z)$ zu $f'(y)$ keine Rücksicht auf die Anwesenheit des z nimmt.

Was ferner den Quotienten

$$\frac{f(y+\Delta y, z+\Delta z)-f(y+\Delta y, z)}{\Delta z}$$

anbelangt, so kann man, weil Δy und Δz sich der gemeinschaftlichen Gränze Null nähern, von ihm behaupten, dass er sich der nämlichen Gränze nähere, wie der folgende

$$\frac{f(y, z+\Delta z)-f(y, z)}{\Delta z},$$

indem der Zuwachs des y am Ende wieder verschwindet. Der vorliegende Quotient nähert sich aber der Gränze $f'(z)$, wenn man analog dem Vorigen unter $f'(z)$ diejenige derivirte Funktion von $f(y, z)$ versteht, bei deren Ableitung y als constant und z als einzige unabhängige Variabele angesehen wird. Nach diesen beiden Bemerkungen ergiebt sich jetzt aus no. (2) der Uebergang zur Gränze für gleichzeitig abnehmende Δx, Δy und Δz,

$$F'(x) = f'(y)\,\varphi'(x) + f'(z)\,\psi'(x)$$

oder auch wenn man statt der derivirten Funktionen die Differenzialquotienten setzt und zur Abkürzung wieder y und z für $\varphi(x)$, $\psi(x)$ braucht,

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{df(y,z)}{dx}=\dfrac{df(y,z)}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{df(y,z)}{dz}\cdot\dfrac{dz}{dx}\\ y=\varphi(x),\quad z=\psi(x).\end{array}\right\} \quad (3)$$

Die Differenzialquotienten

$$\frac{df(y,z)}{dy} \text{ und } \frac{df(y,z)}{dz},$$

in denen man successive die erste und zweite abhängige Variabele als unabhängige Variabele, die jedesmalige andere aber als Constante betrachtet, nennt man dabei die partiellen Differenzialquotienten der gegebenen Funktion.

Aus der Gleichung (3) folgt noch

$$\frac{df(y,z)}{dx}dx = \frac{df(y,z)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}dx + \frac{df(y,z)}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}dx$$

oder einfacher

$$\left.\begin{array}{c}\frac{df(y,z)}{dx}dx = \frac{df(y,z)}{dy}dy + \frac{df(y,z)}{dz}dz \\ y = \varphi(x), \quad z = \psi(x)\end{array}\right\} \quad (4)$$

und dabei sind $\frac{df(y,z)}{dy}dy$ und $\frac{df(y,z)}{dz}dz$ die partiellen Differenziale der Funktion $f(y,z)$ nach y und z genommen *).

Man übersieht leicht, wie sich dieses Theorem noch erweitern lässt; wäre z. B. $f(y, z, t)$ eine Funktion dreier Veränderlichen, die sämmtlich von einer einzigen x abhängen, etwa vermöge der Gleichungen

$$y = \varphi(x), \; z = \psi(x), \; t = \chi(x)$$

so wäre

$$\frac{df(y,z,t)}{dx}$$
$$= \frac{df(y,z,t)}{dy}dy + \frac{df(y,z,t)}{dz}dz + \frac{df(y,z,t)}{dt}dt$$

und ähnlich für mehrere Veränderliche.

Man kann hieraus folgende praktische Regel machen: „Hat man eine Funktion mehrerer Veränderlichen, welche alle von einer einzigen unabhängigen Veränderlichen abhängen, nach dieser unabhängigen zu differenziren, so sehe man jene abhängige Variabelen als ebenso viele unabhängige an und suche in Bezug auf sie die partiellen Differenziale der gegebenen Funktion; die Summe der partiellen Differenziale giebt dann das gesuchte Differenzial, in welchem man dann noch für die abhängigen Variabelen und deren Differenziale ihre Werthe, ausgedrückt durch die unabhängige Veränderliche, setzen kann.“

Als Beispiele betrachten wir die folgenden speciellen Fälle.

I. Sei $f(\sin x, \cos x)$ zu differenziren. Man setze

$$y = \sin x, \quad z = \cos x,$$

so ist

$$df(y,z) = \frac{df(y,z)}{dy}\,d\sin x + \frac{df(y,z)}{dz}\,d\cos x$$

d. i.

*) Es ist hier absichtlich nicht weiter gehoben worden, weil man sonst in der Gleichung $df(y,z) = df(y,z) + df(y,z)$ nicht wüsste, nach welchen Veränderlichen die Differenziationen vor sich gehen, wenn man nicht besondere Marken anhängt, wie etwa:

$$\underset{x}{d}f(y,z) = \underset{y}{d}f(y,z) + \underset{z}{d}f(y,z).$$

$$df(y,z) = \left[\frac{df(y,z)}{dy}\cos x - \frac{df(y,z)}{dz}\sin x\right] dx.$$

Als speziellen Fall nehme man etwa

$$f(y,z) = z^2 - y^2,$$

so wäre

$$\frac{df(y,z)}{dy} = -2y, \quad \frac{df(y,z)}{dz} = +2z,$$

folglich weil $y = \sin x$, $z = \cos x$ ist,

$$d[\cos^2 x - \sin^2 x]$$
$$= [-2\sin x \cos x - 2\cos x \sin x]\, dx = -2\sin 2x\, dx,$$

wovon man sich auch dadurch überzeugen kann, dass man die Gleichung $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$ beachtet.

II. Wollte man die Funktion

$$e^{ax^2} \text{Arcsin}\, x$$

differenziren, so nehme man

$$x^2 = y, \quad \text{Arcsin}\, x = z$$
$$f(y,z) = e^{ay}z,$$

woraus sich ergiebt

$$\frac{df(y,z)}{dy} = ae^{ay}z, \quad \frac{df(y,z)}{dz} = e^{ay}$$

$$dy = 2x\,dx, \quad dz = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

folglich

$$d(e^{ay}z) = (2axze^{ay} + \frac{e^{ay}}{\sqrt{1-x^2}})\, dx.$$

und nach Wiedereinführung der Werthe von y und z,

$$d(e^{ax^2}\text{Arcsin}\, x) = (2ax\,\text{Arcsin}\, x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}})\, e^{ax^2}\, dx.$$

§ 9.

Differenziation der unentwickelten Funktionen.

Eine der wichtigsten Anwendungen der Lehren des vorigen Paragraphen ist die Bestimmung der Differenzialquotienten solcher Funktionen, die nicht völlig entwickelt angegeben sind, sondern für welche

nur eine Bedingungsgleichung gezeigt wird, aus der sie sich allenfalls der Form nach bestimmen liessen. Wird nämlich eine Bedingungsgleichung

$$f(x, y) = 0$$

aufgestellt, welche für alle möglichen x und y erfüllt sein soll, so ist y nicht mehr von x unabhängig, sondern eine gewisse Funktion $y = \varphi(x)$ derselben, deren Form erhalten wird, wenn man in der obigen Gleichung y als unbekannt, x als bekannt ansieht und sie nach y auflöst. In dem Falle, wo diess allgemein möglich ist, hat es dann auch keine Schwierigkeit, den Differenzialquotienten $\frac{dy}{dx} = \varphi'(x)$ zu entwickeln.

Es kommt aber sehr häufig vor, dass man nicht im Stande ist, die Gleichung $f(x, y) = 0$ ganz im Allgemeinen aufzulösen, (z. B. wenn der Grad von y den vierten übersteigt, oder die Gleichung eine transcendente ist) und in solchen Fällen muss man sich nach einer Methode umsehen, welche den Differenzialquotienten $\varphi'(x)$ ohne Auflösung der obigen Gleichung bestimmen lehrt.

Nun ist aber dieses Problem nur ein spezieller Fall der im vorigen Paragraphen behandelten Aufgabe, nämlich derjenige, in welchem

$$z = \psi(x) = x, \quad f(y, z) = f(x, y) = 0$$

ist. Man hat folglich nach no. (3) in § 8

$$\frac{df(x,y)}{dx} = \frac{df(x,y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{df(x,y)}{dx},$$

wobei die beiden Differenzialquotienten rechts

$$\frac{df(x,y)}{dy} \text{ und } \frac{df(x,y)}{dx}$$

als partielle anzusehen sind, in denen x und y als unabhängige Variabelen fungiren. Substituirt man aber in den totalen Differenzialquotienten links den Werth von $y = \varphi(x)$, so muss

$$\frac{df(x,y)}{dx} = \frac{df[x, \varphi(x)]}{dx} = 0$$

sein. Denn vermöge der Bedingungsgleichung $f(x, y) = 0$, aus der sich erst $y = \varphi(x)$ fand, ist die Gleichung

$$f(x,y) = f[x, (\varphi(x)] = 0$$

eine rein identische, für jedes x erfüllte und daraus folgt unmittelbar

durch Differenziation das vorher Behauptete. Wir haben daher auch nach dem Obigen

$$0 = \frac{df(x,y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{df(x,y)}{dx}$$

und mithin

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'(x) = -\frac{\frac{df(x,y)}{dx}}{\frac{df(x,y)}{dy}}. \qquad (2)$$

Um also den Differenzialquotienten der ihrer Form nach unbekannten Funktion $y = \varphi(x)$ zu bestimmen, braucht man blos die partiellen Differenzialquotienten der gegebenen Bedingungsgleichung aufzusuchen und diese durcheinander zu dividiren. Die Formel für $\varphi'(x)$ enthält zwar noch y, welches man im Allgemeinen nicht angeben kann, dessen Werth aber doch gefunden werden kann, sobald x einen speziellen Zahlenwerth bekommt, weil sich dann die Gleichung $f(x, y) = 0$ in eine numerische verwandelt. Man ist also im Stande, für jeden Zahlenwerth von x die zugehörigen Zahlenwerthe von $y = \varphi(x)$ und $\frac{dy}{dx} = \varphi'(x)$ anzugeben. Diess wird aus den folgenden Beispielen noch deutlicher erhellen.

I. Wäre zur Bestimmung von $y = \varphi(x)$ die Gleichung

$$f(x, y) = y^5 x^3 - 2y^4 x^2 + 3y - 6x = 0 \qquad (3)$$

gegeben, so würde man im Allgemeinen y nicht durch x ausdrücken, also auch seinen Differenzialquotienten nicht finden können. Dagegen hat man nach dem Vorigen:

$$\frac{df(x,y)}{dx} = 3y^5 x^2 - 4y^4 x - 6,$$

$$\frac{df(x,y)}{dy} = 5y^4 x^3 - 8y^3 x^2 + 3,$$

mithin

$$\varphi'(x) = -\frac{3y^5 x^2 - 4y^4 x - 6}{5y^4 x^3 - 8y^3 x^2 + 3}. \qquad (4)$$

Wollte man z. B. wissen, welchen Werth $\varphi'(x)$ für $x = 1$ annimmt, so setze man in der Gleichung (3) $x = 1$, wodurch

$$y^5 - 2y^4 + 3y - 6 = 0$$

wird. Hieraus ergeben sich 5 Werthe von y, unter denen sich aber

nur ein einziger reeller $y=2$ findet. Es entsprechen also auch dem Werthe $x=1$ in (4) fünf verschiedene Werthe von $\varphi'(x)$; der einzige reelle darunter ist:

$$\varphi'(1)=-\frac{3.2^5-4.2^4-6}{5.2^4-8.2^3+3}=-\frac{26}{19}.$$

Ebenso würde man für jeden anderen numerischen Werth von x die zugehörigen numerischen Werthe von $\varphi(x)$ und $\varphi'(x)$ suchen können.

II. Findet zwischen x und y die Bedingungsgleichung

$$f(x,y)=x^y-y^x=0 \qquad (5)$$

statt, so hat man

$$\frac{df(x,y)}{dx}=yx^{y-1}-y^x ly,$$

$$\frac{df(x,y)}{dy}=x^y lx-xy^{x-1},$$

folglich

$$\frac{dy}{dx}=\varphi'(x)=\frac{yx^{y-1}-y^x ly}{xy^{x-1}-x^y lx},$$

oder wenn man im Zähler und Nenner für y^x das kraft no. (5) gleichgeltende x^y setzt und dann mit x^y hebt

$$\varphi'(x)=\frac{y^2-xy\,ly}{x^2-xylx}. \qquad (6)$$

So hat man z. B. für $x=2$, $y=\varphi(x)=4$, mithin

$$\varphi'(2)=\frac{4(1-l2)}{1-2l2}.$$

Eben so leicht würde man $\varphi'(\frac{9}{4})$, $\varphi'(\frac{64}{27})$ etc. bestimmen können, weil für $x=\frac{9}{4}$, $\frac{64}{27}$ etc. aus der Gleichung (5) die Werthe $y=\frac{27}{8}$, $\frac{256}{81}$ folgen *).

*) Bringt man die Gleichung (5) auf die Form

$$y^{\frac{1}{y}}=x^{\frac{1}{x}}$$

so erhellt, dass sich die Aufsuchung des y für ein gegebenes x auf das Problem der Auflösung der transscendenten Gleichung

$$y^{\frac{1}{y}}=a,$$

worin a eine bekannte Grösse ist, reduzirt. Ehe wir zeigen, wie sich diese näherungsweis lösen lässt, wollen wir erst bemerken, dass man immer belie-

5

§. 10.

Differenziation imaginärer Funktionen.

Man kommt sehr oft in den Fall, Funktionen differenziren zu müssen, welche imaginäre Grössen enthalten und die man unter der Form:

---

big viele Paare zusammengehöriger Werthe von x und y finden kann, welche die Gleichung (5) befriedigen. Es folgt nämlich aus derselben

$$\frac{y}{x}=\frac{\log y}{\log x}.$$

Setzt man hier $\frac{y}{x}=1+\alpha$, womit blos gesagt ist, dass $y>x$ sei, so wird $y=x(1+\alpha)$. Andererseits muss aber auch $\frac{\log y}{\log x}=1+\alpha$ sein, woraus $\log y =(1+\alpha)\log x$ oder $y=x^{1+\alpha}$ folgt. Vermöge der beiden Werthe von y gilt nun die Gleichung

$$x^{1+\alpha}=x(1+\alpha),$$

woraus durch Hebung mit x und Ausziehung der αten Wurzel folgt

$$x=(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}},$$

und dann wegen der Gleichung $y=x(1+\alpha)$

$$y=(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}+1}.$$

Setzt man für α Brüche, deren Zähler die Einheit ist, wie z. B. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{8}$ etc., so erhält man unendlich viele Paare rationaler zusammengehöriger Werthe.

Will man dagegen für ein gegebenes x das zugehörige y finden, also die Gleichung

$$y^{\frac{1}{y}}=a \text{ oder } y=a^y$$

auflösen, so hat man vermöge der Exponenzialreihe, die später entwickelt werden wird,

$$y=1+\frac{la}{1}y+\frac{(la)^2}{1.2}y^2+\frac{(la)^3}{1.2.3}y^3+\ldots$$

Bricht man die Reihe bei irgend einem Gliede ab, so bleibt eine näherungsweis richtige Gleichung übrig, die man als eine algebraische ansehen und aus der man durch Auflösung nach y als Unbekannter einen Näherungswerth für y finden kann. Da die Reihe selbst convergirt, so lässt sich dadurch, dass man immer mehr Glieder nimmt, die Näherung so weit treiben, als man will. Ein sehr lesenswerther Aufsatz über diesen Gegenstand überhaupt steht im Archiv der Mathem. u. Phys. Theil VI. S. 154.

$$F(x) = \Phi(x) + \sqrt{-1}\,\Psi(x)$$

darstellen kann, wo nun $\Phi(x)$ und $\Psi(x)$ reelle Functionen von x bedeuten. Die Differenziation solcher Ausdrücke hat keine grossen Schwierigkeiten; denn man findet leicht

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$$

$$= \frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x} + \sqrt{-1}\,\frac{\Psi(x+\Delta x)-\Psi(x)}{\Delta x},$$

folglich durch Uebergang zur Gränze für unendlich abnehmende Δx,

$$F'(x) = \Phi'(x) + \sqrt{-1}\,\Psi'(x) \qquad (1)$$

oder

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{d\Phi(x)}{dx} + \sqrt{-1}\,\frac{d\Psi(x)}{dx}. \qquad (2)$$

Die Differenziation von $F(x)$ kommt demnach auf die der einzelnen Funktionen $\Phi(x)$, $\Psi(x)$ zurück; kann man die letzteren nach den bisherigen Mitteln differenziren, so ist hiermit auch das Problem der Differenziation von $F(x)$ gelöst.

Die Betrachtung der Differenzialformeln imaginärer Funktionen bietet darin einen grossen Vortheil dar, dass sich durch dieselbe die Differenzialformeln ganz verschieden gestalteter Funktionen unter einen Gesichtspunkt vereinigen lassen, und dient somit zur Verallgemeinerung des Calculs. So sind z. B. die Differenzialgleichungen [§. 7., no. (19) und (23)]

$$d\{\tfrac{1}{2}l(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}\,x}{\sqrt{a}-\sqrt{b}\,x})\} = \frac{\sqrt{ab}}{a-bx^2}dx \qquad (3)$$

und

$$d\,\mathrm{Arctan}\sqrt{\frac{b}{a}}\,x = \frac{\sqrt{ab}}{a+bx^2}\,dx \qquad (4)$$

wesentlich gar nicht von einander verschieden. Setzt man nämlich in der ersten $-b$ an die Stelle von b, erhält man links die Gleichung

$$d\{\tfrac{1}{2}l(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}\,x\sqrt{-1}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}\,x\sqrt{-1}})\} = \frac{\sqrt{ab}.\sqrt{-1}}{a+bx^2}\,dx$$

oder

$$d\{\frac{1}{2\sqrt{-1}}\,l(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}\,x\sqrt{-1}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}\,x\sqrt{-1}})\} = \frac{\sqrt{ab}}{a+bx^2}dx \qquad (5)$$

und diess in der That richtig. Denn man hat vermöge der Formel:

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}}l\left(\frac{\alpha+\beta\sqrt{-1}}{\alpha-\beta\sqrt{-1}}\right)=\operatorname{Arctan}\frac{\beta}{\alpha}$$

für $\alpha=\sqrt{a}$, $\beta=\sqrt{b}\,x$,

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}}l\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}\,x\sqrt{-1}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}\,x\sqrt{-1}}\right)=\operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{b}{a}}\,x,$$

und durch diese Substitution fällt die Gleichung (5) mit der in (4) zusammen.

Ganz ähnlich verhält es sich mit den Differenzialformeln

$$d\,l(\sqrt{b}\,x+\sqrt{a+bx^2})=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a+bx^2}}dx \qquad (6)$$

und

$$d\operatorname{Arcsin}\sqrt{\frac{b}{a}}\,x=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a-bx^2}}dx. \qquad (7)$$

Nimmt man in der ersten b negativ, so erhält man leicht

$$d\left[\frac{1}{\sqrt{-1}}l(\sqrt{b}\,x\sqrt{-1}+\sqrt{a-bx^2})\right]=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a-bx^2}}dx \qquad (8)$$

Aus der bekannten Formel

$$l(\alpha+\beta\sqrt{-1})=\tfrac{1}{2}l(\alpha^2+\beta^2)+\sqrt{-1}\operatorname{Arctan}\frac{\beta}{\alpha}$$

folgt andererseits für

$$\alpha=\sqrt{a-bx^2},\ \beta=\sqrt{b}\,x$$

die Gleichung

$$l(\sqrt{a-bx^2}+\sqrt{b}\,x\sqrt{-1})=\tfrac{1}{2}la+\sqrt{-1}\operatorname{Arctan}\frac{\sqrt{b}\,x}{\sqrt{a-bx^2}}.$$

Setzt man in der bekannten Formel

$$\operatorname{Arctan}\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}=\operatorname{Arcsin}z$$

$=\sqrt{\frac{b}{a}}\,x$, so findet man

$$\operatorname{Arctan}\frac{\sqrt{b}\,x}{\sqrt{a-bx^2}}=\operatorname{Arcsin}\sqrt{\frac{b}{a}}\,x,$$

folglich nach dem Vorigen

$$\frac{1}{\sqrt{-1}} l(\sqrt{a-bx^2}+\sqrt{b}\, x\sqrt{-1}) = \frac{la}{2\sqrt{-1}} + \text{Arcsin}\sqrt{\frac{b}{a}}\, x$$

und

$$d\{\frac{1}{\sqrt{-1}} l(\sqrt{a-bx^2}+\sqrt{b}+\sqrt{-1})\} = d\,\text{Arcsin}\sqrt{\frac{b}{a}}\, x.$$

Durch Substitution dieses Ausdruckes geht die Gleichung (8) völlig in die unter no. (7) über, womit die Identität der Differenzialformeln (6) und (7) bewiesen ist.

§. 11.

Differenziation der Functionen mehrerer unabhängigen Variabelen.

Lässt man in einer Funktion mehrerer von einander aber völlig unabhängiger Variabelen sich eine dieser Variabelen ändern, so zieht diese Aenderung keine Aenderungen der anderen Variabelen nach sich, welche demnach für die mit dem Inkrement der einen Veränderlichen vorzunehmenden Rechnungsoperationen als Constanten anzusehen sind. Geht man also in dem Quotienten, der die Aenderung der Funktion zum Zähler und die Aenderung der Veränderlichen zum Nenner hat, bis zur Gränze der Abnahme überhaupt, so erhalten wir jederzeit einen partiellen Differenzialquotienten. Dagegen könnte man sämmtlichen in der Funktion vorkommenden unabhängigen Veränderlichen gleichzeitig beliebige Inkremente ertheilen und die totale Aenderung der Funktion oder die Gränze der Aenderung zu bestimmen suchen. In diesem Falle erhält man das totale Differenzial.

Sei nun $f(x,y)$ eine Funktion zweier von einander unabhängiger Variabelen; geben wir den Grössen x und y die beiden willkührlichen, also von einander unabhängigen Inkremente Δx und Δy, so nennen wir die Differenz

$$f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,y)=\Delta f(x,y) \qquad (1)$$

die totale Differenz der Funktion $f(x,y)$. Dieselbe ist auch

$$=\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}\Delta x+\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x+\Delta x,y)}{\Delta y}\Delta y. \qquad (2)$$

Lassen wir nun Δx und Δy sich gleichzeitig der Null nähern, so ist

$$\text{Lim}\,\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}=\frac{df(x,y)}{dx}$$

und

$$\operatorname{Lim} \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x+\Delta x, y)}{\Delta y}$$
$$=\operatorname{Lim} \frac{f(x, y+\Delta y)-f(x, y)}{\Delta x}=\frac{df(x,y)}{dy},$$

wobei die Differenzialquotienten

$$\frac{df(x,y)}{dx} \text{ und } \frac{df(x,y)}{dy}$$

partielle sind. Man hat demnach aus no. (2)

$$df(x,y)=\frac{df(x,y)}{dx}dx+\frac{df(x,y)}{dy}dy, \tag{3}$$

wofür man auch zuweilen schreibt

$$df(x,y)=\underset{x}{d}f(x,y)+\underset{y}{d}f(x,y). \tag{4}$$

Das totale Differenzial ist demnach die Summe der beiden partiellen Differenziale.

Eben so leicht findet man allgemeiner

$$df(x,y,z)$$
$$=\frac{df(x,y,z)}{dx}dx+\frac{df(x,y,z)}{dy}dy+\frac{df(x,y,z)}{dz}dz$$

oder

$$df(x,y,z)=\underset{x}{d}f(x,y,z)+\underset{y}{d}f(x,y,z)+\underset{z}{d}f(x,y,z)$$

und ähnlich für jede weitere Anzahl von Veränderlichen.

Man wird leicht bemerken, dass die so eben angestellte Betrachtung viel Aehnlichkeit mit der in §. 3. durchgeführten hat; in der That ist der Unterschied nur gering; in der Gleichung (3) bedeutet dy als Faktor des partiellen Differenzialquotienten rechts eine Grösse, welche man auf irgend welche beliebige Weise bis zur Gränze Null zu vermindern hat; diese Verminderung findet auch bei dem dy in § 8. statt, nur dass sie da nicht willkührlich, sondern durch die Gleichung $y=\varphi(x)$ von dx abhängig ist, woraus am Ende der Rechnung noch die Forderung entspringt, für dy seinen Werth durch dx ausgedrückt zu substituiren.

Cap. IV. Die derivirten Funktionen und Differenzialquotienten höherer Ordnungen.

§. 12.

Begriff und geometrische Bedeutung der derivirten Funktionen und Differenzialquotienten höherer Ordnungen.

Rein analytisch betrachtet ist die derivirte Funktion einer gegebenen Funktion nichts Anderes, als eine neue Funktion, welche man nach einer gewissen Regel aus der ursprünglichen ableiten kann. So wie man nun schon in der Arithmetik eine einmal aufgestellte Rechnungsoperation mehrmals hinter einander anwendet (z. B. die Multiplikation, durch deren Wiederholung die Potenz mit ganzem positiven Exponenten entsteht), so muss man sich auch hier versucht fühlen, durch successive Anwendung des nämlichen Verfahrens, aus der derivirten Function eine zweite derivirte Funktion, aus dieser eine dritte u. s. f. abzuleiten. So können wir aus einer gegebenen Funktion $F(x)$ eine beliebig weit fortlaufende Reihe derivirter Funktionen entwickeln:

$$F'(x),\ F''(x),\ F'''(x),\ \ldots\ F^{(n-1)}(x),\ F^{(n)}(x),$$

deren jede aus der ihr vorhergehenden auf die nämliche Weise entspringt, wie die erste $F'(x)$ aus $F(x)$ selbst und in denen die obenangesetzte Anzahl von Strichen die **Ordnung** der derivirten Funktion angiebt.

Es ist nicht schwer, die geometrische Bedeutung solcher successiven Derivationen einzusehen, so weit überhaupt eine solche existirt; die folgende Betrachtung wird uns hierzu dienen.

Es sei in Fig. 7 $OA=x$, $AP=f(x)$ und die krummlinig begränzte Fläche $OAPR=F(x)$, so ist nach den in der Einleitung angestellten Untersuchungen

$$AP=f(x)=F'(x).$$

Wollen wir hieraus $F''(x)$ ableiten, so müssen wir auf $F'(x)$, d. h. $f(x)$ dieselben Operationen anwenden, durch welche $F'(x)$ selbst erst aus $F(x)$ abgeleitet worden ist; wir haben also:

$$F''(x)=\operatorname{Lim}\frac{F'(x+\Delta x)-F'(x)}{\Delta x}$$

oder was das Nämliche ist

$$F''(x)=\text{Lim}\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}.$$

Lassen wir nun x um ein Stück $\delta=AB$ zunehmen, so ist $BQ=f(x+\delta)$ folglich $f(x+\delta)-f(x)=UQ$, wenn $PU \parallel AB$ gezogen wird; mithin

$$\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}=\frac{UQ}{PU}=\tan UPQ.$$

Ziehen wir ferner durch P eine Tangente ST an die Curve und setzen $\angle TSA=\angle TPU=\omega$ und $\angle QPT=\varepsilon$, so ist

$$\angle UPQ=\omega+\varepsilon,$$

folglich

$$\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}=\tan(\omega+\varepsilon).$$

Lassen wir jetzt δ continuirlich abnehmen, so rückt die Gerade BQ immer näher an AP, zugleich der Punkt Q immer näher an den Punkt T, folglich vermindert sich auch der Winkel $QPT=\varepsilon$ beständig. Ist endlich $\delta=0$ geworden, so sind die Punkte Q und T in einen einzigen und zwar in P zusammengefallen und es ist $\angle QPT=\varepsilon=0$. Die Grösse ε nimmt also mit δ gleichzeitig bis zur Gränze Null ab und es ist mithin:

$$\text{Lim}\,\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}=\tan\omega$$

oder

$$f'(x) \text{ d. h. } F''(x)=\tan\omega,$$

woraus die geometrische Bedeutung der zweiten derivirten Funktion für den Fall, dass die Urfunktion eine Fläche repräsentirt, mit völliger Deutlichkeit erhellt. Wollte man hier weiter gehen, so würde man aus dem Gebiete der Geometrie völlig herauskommen; denn mit jeder Derivation erniedrigt sich der Grad der Funktion, indem man von der zweiten Dimension (die Fläche) zur ersten (die Linie) und von dieser zur nullten, d. h. zur Zahl $\tan\omega$ gelangt; eine weitere Derivation hätte also gar keine geometrische Bedeutung mehr.

Analog den derivirten Funktionen höherer Ordnungen kann man auch die Differenzialquotienten und Differenzialgleichungen höherer Ordnungen entwickeln, indem man aus dem Differenzialquotienten für $F'(x)$ den für $F''(x)$, hieraus den für $F'''(x)$ u. s. f. ableitet. Man hat nämlich

$$F''(x) = \text{Lim}\frac{F'(x+\Delta x) - F'(x)}{\Delta x} = \frac{dF'(x)}{dx}$$

oder wenn man für $F'(x)$ seinen Werth $\frac{dF(x)}{dx}$ setzt,

$$F''(x) = \frac{d\frac{dF(x)}{dx}}{dx}.$$

Nun ist aber dx von x unabhängig; denn es bedeutet das Differenzial dx (oder d_x, wie wir in der Einleitung bezeichneten) ein Inkrement, welches man dem x willkührlich gegeben und dem man nur die Bedingung unendlicher Abnahme auferlegt hat, ohne das Gesetz zu bestimmen, nach welchem diese Abnahme vor sich gehen soll. In Bezug auf die neue Differenziation ist daher dx als Constante anzusehen*) und daher wird

$$F''(x) = \frac{\frac{ddF(x)}{dx}}{dx} = \frac{ddF(x)}{dx \cdot dx},$$

wofür man die Bezeichnung

$$\frac{d^2F(x)}{dx^2} = F''(x)$$

eingeführt hat, indem dx an der Stelle von $(dx)^2$ steht.

Durch Differenziation dieser Gleichung ergiebt sich weiter

$$\frac{d\frac{d^2F(x)}{dx^2}}{dx} = F'''(x)$$

oder

$$\frac{dd^2F(x)}{dx^2\,dx} = F'''(x),$$

wofür man schreibt

$$\frac{d^3F(x)}{dx^3} = F'''(x).$$

Eben so hat man weiter

*) Wäre x nicht unabhängig veränderlich, so würde das Gesetz, nach welchem sich dx der Null nähert, nicht mehr beliebig sein, denn z. B. für $x = \varphi(t)$ wäre $dx = \varphi'(t)\,dt$, und dann gilt auch im Allgemeinen die Consequenz nicht, dass man dx in Bezug auf eine neue Differenziation für constant anzusehen habe.

$$\frac{d^4F(x)}{dx^4} = F^{IV}(x)$$

u. s. f. und überhaupt

$$\frac{d^nF(x)}{dx^n} = F^{(n)}(x),$$

wofür man auch die Differenzialgleichung schreiben könnte

$$d^n F(x) = F^{(n)} dx^n.$$

Man muss sich hüten, das n auf der linken Seite für einen Exponenten zu halten, wie diess auf der rechten Seite der Fall ist. Im Gegentheil vertritt es dort die Stelle eines Index, welcher anzeigt, wie vielmal nach einander die Operation des Differenzirens auf die Funktion $F(x)$ angewendet worden ist.

In manchen Fällen bedient man sich auch noch einer dritten Bezeichnungsweise, welche oft sehr vortheilhaft ist. Man schreibt nämlich an die Stelle von $\frac{d^nF(x)}{dx^n}$ einfacher $D^nF(x)$, so dass also

$$\frac{d^nF(x)}{dx^n} = F^{(n)}(x) = D^nF(x)$$

ist. Diese Bezeichnung hat das Bequeme, dass man bei Funktionen mehrer Veränderlichen die Grösse, nach welcher differenzirt wird, leicht als Marke anhängen kann; z. B.

$$\underset{y}{D^n}F(x, y, z) = \frac{d^nF(x, y, z)}{dy^n},$$

wobei der $n$te Differenzialquotient partiell nach y genommen ist.

§. 13.

Höhere Differenzialquotienten der Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten zweier Funktionen.

So wie wir früher untersucht hatten, nach welchen Regeln sich die ersten Differenzialquotienten solcher Funktionen bilden, welche aus zwei anderen mittelst der vier Spezies zusammengesetzt sind, so müssen wir nun auch die höheren Differenzialquotienten von Ausdrücken, wie

$$\varphi(x) + \psi(x)\ ,\ \varphi(x) - \psi(x)\ ,\ \varphi(x)\psi(x)\ ,\ \frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

zu entwickeln suchen. Diess hat namentlich für die beiden ersten nicht die geringste Schwierigkeit.

I. Nach dem Früheren ist bekanntlich

$$\frac{d[\varphi(x) \pm \psi(x)]}{dx} = \frac{d\varphi(x)}{dx} \pm \frac{d\psi(x)}{dx}.$$

Bemerkt man, dass wenn zwei Funktionen einander identisch sind, auch ihre Differenzialquotienten es sein müssen, so erhält man durch eine fernere beiderseitige Differenziation:

$$\frac{d^2[\varphi(x) \pm \psi(x)]}{dx^2} = \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + \frac{d^2\psi(x)}{dx^2}.$$

Eine nochmalige Differenziation würde geben

$$\frac{d^3[\varphi(x) \pm \psi(x)]}{dx^3} = \frac{d^3\varphi(x)}{dx^3} \pm \frac{d^3\psi(x)}{dx^3}$$

und hieraus erhellt, dass überhaupt die Gleichung gilt

$$\frac{d^n[\varphi(x) \pm \psi(x)]}{dx^n} = \frac{d^n\varphi(x)}{dx^n} \pm \frac{d^n\psi(x)}{dx^n}, \qquad (1)$$

wofür man auch schreiben kann:

$$D^n[\varphi(x) \pm \psi(x)] = D^n\varphi(x) \pm D^n\psi(x), \qquad (2)$$

und eben so hat man die Differenzialgleichung:

$$d^n[\varphi(x) \pm \psi(x)] = d^n\varphi(x) \pm d^n\psi(x). \qquad (3)$$

II. Etwas verwickelter gestalten sich die höheren Differenzialquotienten des Produktes zweier Funktionen. Aus der Gleichung

$$\frac{d[\varphi(x)\psi(x)]}{dx} = \psi(x)\frac{d\varphi(x)}{dx} + \frac{d\psi(x)}{dx}\varphi(x),$$

folgt zunächst durch Differenziation

$$\frac{d^2[\varphi(x)\psi(x)]}{dx^2} = \psi(x)\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + \frac{d\psi(x)}{dx} \cdot \frac{d\varphi(x)}{dx}$$
$$+ \frac{d\psi(x)}{dx} \cdot \frac{d\varphi(x)}{dx} + \frac{d^2\psi(x)}{dx^2}\varphi(x),$$

d. i.

$$\frac{d^2[\varphi(x)\psi(x)]}{dx^2} = \psi(x)\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + 2\frac{d\psi(x)}{dx} \cdot \frac{d\varphi(x)}{dx} + \frac{d^2\psi(x)}{dx^2}\varphi(x);$$

Hieraus erhält man durch eine weitere Differenziation

$$\frac{d^3[\varphi(x)\psi(x)]}{dx^3} = \psi(x)\frac{d^3\varphi(x)}{dx^3} + \frac{d\psi(x)}{dx}\cdot\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}$$
$$+2\frac{d\psi(x)}{dx}\cdot\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + 2\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}\cdot\frac{d\varphi(x)}{dx}$$
$$+\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}\cdot\frac{d\varphi(x)}{dx} + \frac{d^3\psi(x)}{dx^3}\varphi(x)$$

oder

$$\frac{d^3[\varphi(x)\psi(x)]}{dx^3}$$
$$=\psi(x)\frac{d^2\varphi(x)}{dx^3} + 3\frac{d\psi(x)}{dx}\cdot\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + 3\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}\cdot\frac{d\varphi(x)}{dx} + \frac{d^3\psi(x)}{dx^3}\varphi(x)$$

Betrachtet man die Weise, in der sich hier die Coeffizienten bilden, so wird man leicht bemerken, dass dieselbe mit der Rekursionsformel für die Binomialkoeffizienten identisch ist. Denn die obigen Coeffizienten entspringen durch successive Addition je zwei vorhergehender nach dem Schema

1, 1
1, 2, 1
1, 3, 3, 1
etc.,

welches zugleich das Bildungsgesetz für die Binomialkoeffizienten ist. Beachtet man noch, dass in Formel (1) die Differenzialquotienten von $\varphi(x)$ der Ordnung nach fallen, die von $\psi(x)$ eben so regelmässig steigen, so darf man mit vieler Wahrscheinlichkeit folgendes Gesetz vermuthen:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^n[\varphi(x)\psi(x)]}{dx^n} = \\ &\psi(x)\frac{d^n\varphi(x)}{dx^n} + n_1\frac{d\psi(x)}{dx}\cdot\frac{d^{n-1}\varphi(x)}{dx^{n-1}} + n_2\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}\cdot\frac{d^{n-2}\varphi(x)}{dx^{n-2}} + \dots \\ &\dots + n_{n-1}\frac{d^{n-1}\psi(x)}{dx^{n-1}}\cdot\frac{d\varphi(x)}{dx} + \frac{d^n\psi(x)}{dx^n}\varphi(x). \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Seine Richtigkeit erkennt man leicht, wenn man unter einstweiliger Annahme desselben, die Form untersucht, welche der nächst höhere Differenzialquotient bekommen muss. Durch nochmalige Differenziation ergiebt sich nämlich aus (2)

$$\frac{d^{n+1}[\varphi(x)\psi(x)]}{dx^{n+1}} = \psi(x)\frac{d^{n+1}\varphi(x)}{dx^{n+1}} + \frac{d\psi(x)}{dx}\cdot\frac{d^n\varphi(x)}{dx^n}$$
$$+ n_1\frac{d\psi(x)}{dx}\cdot\frac{d^n\varphi(x)}{dx^n} + n_1\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}\cdot\frac{d^{n-1}\varphi(x)}{dx^{n-1}}$$
$$+ n_2\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}\cdot\frac{d^{n-1}\varphi(x)}{dx^{n-1}} + n_2\frac{d^3\psi(x)}{dx^3}\cdot\frac{d^{n-2}\varphi(x)}{dx^{n-2}}$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ n_{n-1}\frac{d^{n-1}\psi(x)}{dx^{n-1}}\cdot\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + n_{n-1}\frac{d^n\psi(x)}{dx^{n-1}}\frac{d\varphi(x)}{dx}$$
$$+ \frac{d^n\psi(x)}{dx^n}\cdot\frac{d\varphi(x)}{dx} + \frac{d^{n+1}\psi(x)}{dx^{n+1}}\varphi(x),$$

und wenn man die Glieder in diagonaler Richtung zusammennimmt,

$$\frac{d^{n+1}[\varphi(x)\psi(x)]}{dx^{n+1}} =$$
$$\psi(x)\frac{d^{n+1}\varphi(x)}{dx^{n+1}} + [1+n_1]\frac{d\psi(x)}{dx}\cdot\frac{d^n\varphi(x)}{dx^n} + [n_1+n_2]\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}\cdot\frac{d^{n-1}\varphi(x)}{dx^{n-1}} + \cdots$$
$$\cdots + [n_{n-1}+1]\frac{d^n\psi(x)}{dx^n}\cdot\frac{d\varphi(x)}{dx} + \frac{d^{n+1}\psi(x)}{dx^{n+1}}\varphi(x).$$

Zieht man je zwei der in Klammern stehenden Binomialkoeffizienten nach dem Satze*)

$$n_{p-1} + n_p = (n+1)_p$$

für $p = 1, 2, 3, \ldots n$ in einen zusammen, so ist jetzt

---

*) Es ist nämlich

$$n_p = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}{1.2.3\ldots p}$$
$$n_{p-1} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+2)}{1.2.3\ldots(p-1)},$$

also

$$n_{p-1} = \frac{p}{n-p+1}\, n_p$$

folglich

$$n_{p-1} + n_p = \left\{\frac{p}{n-p+1} + 1\right\} n_p = \frac{n+1}{n-p+1}\, n_p$$

d. i. vermöge des Werthes von n_p

$$n_{p-1} + n_p = \frac{(n+1)n(n-1)\ldots(n-p+2)}{1.2.3\ldots p},$$

wobei die rechte Seite nichts Anderes als $(n+1)_p$ ist, wie man sogleich übersieht, wenn man in der Formel für n_p statt n, $n+1$ setzt.

$$\frac{d^{n+1}[\varphi(x)\psi(x)]}{dx^{n+1}} =$$

$$\psi(x)\frac{d^{n+1}\varphi(x)}{dx^{n+1}} + (n+1)_1\frac{d\psi(x)}{dx}\cdot\frac{d^n\varphi(x)}{dx^n} + (n+1)_2\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}\cdot\frac{d^{n-1}\varphi(x)}{dx^{n-1}} + ..$$

$$... + (n+1)_n\frac{d^n\psi(x)}{dx^n}\cdot\frac{d\varphi(x)}{dx} + \frac{d^{n+1}\psi(x)}{dx^{n+1}}\varphi(x).$$

Denselben Ausdruck für den $(n+1)$ten Differenzialquotienten würde man aber auch erhalten, wenn man in der Formel (2) $n+1$ für n setzt. Das hypothetisch angenommene Bildungsgesetz der höheren Differenzialquotienten gilt demnach für die $(n+1)$te Ordnung, wenn es für die $n$te richtig ist; da es aber für die erste Ordnung gilt, so muss es jetzt allgemein gültig sein.

Man kann das Theorem in (3) auch in folgender Form darstellen

$$\left.\begin{array}{c} D^n[\varphi(x)\psi(x)] = \\ \psi(x)D^n\varphi(x) + n_1 D\psi(x)D^{n-1}\varphi(x) + n_2 D^2\psi(x)D^{n-2}\varphi(x) + \dots \\ \dots + n_{n-1}D^{n-1}\psi(x)D\varphi(x) + D^n\psi(x)\varphi(x). \end{array}\right\} \quad (3)$$

Schreibt man die Reihe rechts in umgekehrter Ordnung und berücksichtigt, dass $n_{n-1} = n_1$, $n_{n-2} = n_2$, $n_{n-3} = n_3$ etc. ist, so kann man auch setzen

$$\left.\begin{array}{c} D^n[\varphi(x)\psi(x)] = \\ \varphi(x)D^n\psi(x) + n_1 D\varphi(x)D^{n-1}\psi(x) + n_2 D^2\varphi(x)D^{n-2}\psi(x) + \dots \\ \dots + n_{n-1}D^{n-1}\varphi(x)D\psi(x) + D^n\varphi(x)\psi(x). \end{array}\right\} \quad (4)$$

Ist einer der Faktoren constant, etwa $\psi(x) = a$, so sind die Differenzialquotienten

$$D\psi(x),\ D^2\psi(x),\ D^3\psi(x), \dots D^n\psi(x)$$

sämmtlich $=0$ und folglich bleibt nach (3) und (4)

$$D^n[a\varphi(x)] = aD^n\varphi(x). \qquad (5)$$

III. Auch für die höheren Differenzialquotienten der Quotienten zweier Funktionen wie

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

kann man allgemeine Formeln aufstellen, deren Gesetz aber ziemlich verwickelt ist. Wir können sie aus doppelten Gründen übergehen; einerseits, weil sie fast nie gebraucht werden und andererseits, weil man in den wenigen Fällen, wo man sie brauchen könnte, die Aufgabe leicht auf die vorige reduziren kann. Setzt man nämlich $\frac{1}{\psi(x)} = \chi(x)$, so wird

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \varphi(x)\chi(x);$$

kann man nun im speciellen Falle der Anwendung die höheren Differenzialquotienten von $\chi(x)$ entwickeln, so giebt die Anwendung des vorigen Theoremes (5) unmittelbar die höheren Differenzialquotienten des Produktes $\varphi(x)\chi(x)$, indem man sich nur die Funktion $\psi(x)$ dort durch $\chi(x)$ ersetzt denkt.

IV. Zu bemerken ist endlich noch der Satz: wenn $F(x) = \varphi(x) + \sqrt{-1}\,\psi(x)$ ist, so wird

$$D^n F(x) = D^n \varphi(x) + \sqrt{-1}\, D^n \psi(x),$$

von dessen Richtigkeit man sich leicht durch mehrmalige Wiederholung der Betrachtungen des § 10 überzeugen kann.

§ 14.

Die höheren Differenzialquotienten der wichtigsten algebraischen Funktionen.

I. Für die Differenziation der Potenz x^μ kann man sehr leicht das allgemeine Gesetz entdecken; man erhält nämlich der Reihe nach

$$\frac{d(x^\mu)}{dx} = \mu x^{\mu-1}$$

$$\frac{d^2(x^\mu)}{dx^2} = \mu(\mu-1)x^{\mu-2}$$

$$\frac{d^3(x^\mu)}{dx^3} = \mu(\mu-1)(\mu-2)x^{\mu-3}$$

oder überhaupt für $\frac{d^n(x^\mu)}{dx^n} = D^n(x^\mu)$

$$D^n(x^\mu) = \mu(\mu-1)(\mu-2)\dots(\mu-\overline{n-1})x^{\mu-n}. \tag{1}$$

Beispiele hierzu sind $\mu = -1$, $\mu = -\frac{1}{2}$, für welche speziellen Werthe man findet

$$D^n\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{(-1)^n 1.2.3....n}{x^{n+1}} \tag{2}$$

$$D^n\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{(-1)^n 1.3.5...(2n-1)}{2^n x^n \sqrt{x}} \tag{3}$$

II. Es ist hiernach auch leicht, die höheren Differenzialquotienten der allgemeineren Funktionen

$$(a+bx)^\mu$$

zu entwickeln. Denn setzt man $a+bx=z$, so ist nach (1)

$$D^n(z^\mu)=\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\overline{n-1})z^{\mu-n}.$$

Andererseits hat man

$$D^n(z^\mu)=\frac{d^n(z^\mu)}{dz^n}=\frac{d^n[(a+bx)^\mu]}{[d(a+bx)]^n}=\frac{d^n[(a+bx)^\mu]}{(bdx)^n}$$

$$=\frac{1}{b^n}\frac{d^n[(a+bx)^\mu]}{dx^n}=\frac{1}{b^n}D^n(a+bx)^\mu.$$

Führt man dieses nebst dem Werthe von z in die vorige Gleichung ein, so ergiebt sich nach beiderseitiger Multiplikation mit b^n,

$$D^n(a+bx)^\mu=\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\overline{n-1})b^n(a+bx)^{\mu-n}. \quad (4)$$

Specielle Fälle bilden z. B. die Annahmen $\mu=-1$, $\mu=-\frac{1}{2}$, wofür man bekommt

$$D^n\left(\frac{1}{a+bx}\right)=\frac{(-1)^n 1.2.3\ldots nb^n}{(a+bx)^{n+1}} \quad (5)$$

$$D^n\left(\frac{1}{\sqrt{a+bx}}\right)=\frac{(-1)^n 1.3.5\ldots(2n-1)b^n}{2^n(a+bx)^n\sqrt{a+bx}} \quad (6)$$

und entsprechend für negative b

$$D^n\left(\frac{1}{a-bx}\right)=\frac{1.2.3\ldots nb^n}{(a-bx)^{n+1}}, \quad (7)$$

$$D^n\left(\frac{1}{\sqrt{a-bx}}\right)=\frac{1.3.5\ldots(2n-1)b^n}{2^n(a-bx)^n\sqrt{a-bx}}. \quad (8)$$

III. Die so eben entwickelten Formeln können selbst wieder zur Aufsuchung der höheren Differenzialquotienten zusammengesetzterer Funktionen benutzt werden, sobald diese letzteren sich auf irgend eine Weise in andere von der oben betrachteten Form zerlegen lassen. Einige der wichtigsten Fälle der Art sind folgende.

Aus der eine Zerlegung darstellenden identischen Gleichung

$$\frac{1}{a^2-b^2x^2}=\frac{1}{2a}\left\{\frac{1}{a+bx}-\frac{1}{-a+bx}\right\}$$

folgt sogleich nach §. 13 no. (2)

$$D^n\left(\frac{1}{a^2-b^2x^2}\right)=\frac{1}{2a}\left\{D^n\left(\frac{1}{a+bx}\right)-D^n\left(\frac{1}{-a+bx}\right)\right\},$$

d. h. nach Formel (5)

$$=\frac{1}{2a}\left\{\frac{(-1)^n 1.2\,..\,nb^n}{(a+bx)^{n+1}}-\frac{(-1)^n 1.2\,..\,nb^n}{(-a+bx)^{n+1}}\right\},$$

d. i. wenn man die gemeinschaftlichen Faktoren absondert,

$$D^n\left(\frac{1}{a^2-b^2x^2}\right)=\frac{(-1)^n 1.2\,..\,nb^n}{2a}\left\{\frac{1}{(a+bx)^{n+1}}-\frac{1}{(-a+bx)^{n+1}}\right\}. \quad (9)$$

Durch ganz das nämliche Verfahren ergiebt sich aus der Gleichung

$$\frac{x}{a^2-b^2x^2}=-\frac{1}{2b}\left\{\frac{1}{a+bx}+\frac{1}{-a+bx}\right\}$$

die Differenzialformel

$$D^n\left(\frac{x}{a^2-b^2x^2}\right)=(-1)^{n+1}1.2\,..\,nb^{n-1}\left\{\frac{1}{(a+bx)^{n+1}}+\frac{1}{(-a+bx)^{n+1}}\right\}. \quad (10)$$

Diese Formeln lassen sich noch etwas weiter ausdehnen, wenn man die willkührliche Constante a imaginär nimmt, also etwa $a\sqrt{-1}=ai$ für a setzt. Es wird dann aus (9)

$$D^n\left(\frac{1}{a^2+b^2x^2}\right)=-\frac{(-1)^n 1.2\,..\,nb^n}{2ai}\left\{\frac{1}{(ai+bx)^{n+1}}-\frac{1}{(-ai+bx)^{n+1}}\right\}$$

oder wenn man rechts Alles auf gleichen Nenner bringt

$$D^n\left(\frac{1}{a^2+b^2x^2}\right)=\frac{(-1)^n 1.2\,..\,nb^n}{2ai}\cdot\frac{(ai+bx)^{n+1}-(-ai+bx)^{n+1}}{(a^2+b^2x^2)^{n+1}}.$$

Setzen wir nun, um die imaginären Ausdrücke los zu werden,

$$ai+bx=\varrho(\cos\omega+i\sin\omega)$$
$$-ai+bx=\varrho'(\cos\omega'-i\sin\omega'),$$

so folgt

$$\varrho\cos\omega=bx,\quad \varrho\sin\omega=a$$
$$\varrho'\cos\omega'=bx,\quad \varrho'\sin\omega'=a$$

und hieraus

$$(\varrho\cos\omega)^2+(\varrho\sin\omega)^2=a^2+b^2x^2$$
$$\tan\omega=\frac{a}{bx}$$
$$(\varrho'\cos\omega')^2+(\varrho'\sin\omega')^2=a^2+b^2x^2$$
$$\tan\omega'=\frac{a}{bx},$$

folglich wenn k eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet

$$\varrho=(a^2+b^2x^2)^{\frac{1}{2}},\ \omega=\text{Arctan}\,\frac{a}{bx}+k\pi$$

$$\varrho'=(a^2+b^2x^2)^{\frac{1}{2}},\ \omega'=\text{Arctan}\,\frac{a}{bx}+k\pi,$$

also $\varrho=\varrho'$; $\omega=\omega'$ und mithin

$$D^n\left(\frac{1}{a^2+b^2x^2}\right)$$

$$=\frac{(-1)^n 1.2..nb^n}{2ai}\cdot\frac{[\varrho(\cos\omega+i\sin\omega)]^{n+1}-[\varrho(\cos\omega-i\sin\omega)]^{n+1}}{(a^2+b^2x^2)^{n+1}}$$

$$=\frac{(-1)^n 1.2..n\,b^n\varrho^{n+1}}{2ai}\cdot\frac{\cos(n+1)\omega+i\sin(n+1)\omega-(\cos(n+1)\omega-i\sin(n+1)\omega)}{(a^2+b^2x^2)^{n+1}}$$

d. i. vermöge des Werthes von ϱ

$$D^n\left(\frac{1}{a^2+b^2x^2}\right)=\frac{(-1)^n 1.2..nb^n}{a}\cdot\frac{\sin(n+1)\omega}{(a^2+b^2x^2)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

Zu bemerken ist noch, dass in dem Werthe von ω die ganze Zahl $k=0$ sein muss. Denn da die linke Seite der vorstehenden Gleichung für negative a die nämliche bleibt wie für positive, so muss diess auch mit der rechten Seite der Fall sein. Diess kann aber nur geschehen, wenn für negative a der Bogen negativ wird, wo dann in der That wegen des negativen Divisors a der ganze Ausdruck positiv ausfällt. Es kann aber für negative a der Bogen $\omega=\text{Arctan}\,\frac{a}{bx}+k\pi$ nur dann negativ werden, wenn $k=0$ ist, und so ergiebt sich

$$D^n\left(\frac{1}{a^2+b^2x^2}\right)=\frac{(-1)^n 1.2..nb^n}{a}\cdot\frac{\sin[(n+1)\,\text{Arctan}\,\frac{a}{bx}]}{(a^2+b^2x^2)^{\frac{n+1}{2}}}.\qquad(11)$$

Wendet man die nämlichen Transformationen auf die Gleichung (10) an, so findet man ebenso leicht

$$D^n\left(\frac{x}{a^2+b^2x^2}\right)=(-1)^n 1.2..nb^{n-1}\,\frac{\cos[(n+1)\,\text{Arctan}\,\frac{a}{bx}]}{(a^2+b^2x^2)^{\frac{n+1}{2}}}.\qquad(12)\ ^*)$$

---

*) Für in der Sprache der Analysis weniger Geübte möge hier noch die Bemerkung stehen, dass ein Ausdruck, wie sin (m Arctan z) gewissermassen eine algebraisch geometrische Aufgabe involvirt, die sich auch leicht analytisch lösen lässt. Es sei nämlich ein spitzer Bogen u gegeben, dessen Tan-

In ähnlicher Weise, wie wir so eben die Theoreme I. und IV. in §. 13 zur Entwickelung der höheren Differenzialquotienten einer etwas zusammengesetzteren Funktion benutzt haben, können wir auch das Theorem II. das. zu gleichem Zwecke anwenden. Wäre z. B. die Funktion

$$\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}$$

zu differenziren, so nehmen wir

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{a+bx}},\ \psi(x)=\frac{1}{\sqrt{a-bx}},$$

wodurch sich ergiebt:

$$\varphi(x)\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{(a+bx)(a-bx)}}=\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2x^2}},$$

folglich ist nun nach dem genannten Satze

$$D^n\left(\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a+bx}}D^n\left(\frac{1}{\sqrt{a-bx}}\right)+n_1 D\left(\frac{1}{\sqrt{a+bx}}\right)D^{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{a-bx}}\right)$$

$$+n_2 D^2\left(\frac{1}{\sqrt{a+bx}}\right)D^{n-2}\left(\frac{1}{\sqrt{a-bx}}\right)+\ldots.$$

---

gente z heissen möge, derselbe m mal genommen und die Aufgabe gestellt, den Sinus von mu durch die Tangente von u auszudrücken, so hat man hierin den einfachen Sinn von $\sin(m \operatorname{Arctan} z)$, und die Aufgabe selbst würde sich leicht nach der algebraisch-geometrischen Methode lösen lassen. Man kann sie aber auch mit Hülfe goniometrischer Formeln behandeln, wie im folgenden Beispiele. Es ist $\sin 3u = 3\sin u - 4\sin^3 u$; oder weil immer $\sin u = \frac{\tan u}{\sqrt{1+\tan^2 u}}$ ist

$$\sin 3u = 3\frac{\tan u}{\sqrt{1+\tan^2 u}} - 4\left(\frac{\tan u}{\sqrt{1+\tan^2 u}}\right)^3,$$

da aber $\tan u = z$ als bekannt vorausgesetzt wird, so folgt

$$\sin(3 \operatorname{Arctan} z) = 3\frac{z}{\sqrt{1+z^2}} - 4\left(\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\right)^3.$$

Auf ähnliche Weise kann man für jedes positive ganze m mit Hülfe der goniometrischen Formeln Ausdrücke wie $\sin(m \operatorname{Arctan} z)$ und $\cos(m \operatorname{Arctan} z)$ vollständig entwickeln.

6*

doer wenn man die Formeln (8) und (6) des vorigen Paragraphen für $n=n,\ n-1,\ n-2,\dots$ und $n=1,2,3,\dots$ in Anwendung bringt

$$D^n\left(\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}\right)=$$

$$\frac{1}{\sqrt{a+bx}}\cdot\frac{1.3.5\dots(2n-1)b^n}{2^n(a-bx)^n\sqrt{a-bx}}-n_1\frac{1.b}{2(a+bx)\sqrt{a+bx}}\cdot\frac{1.3.5\dots(2n-3)b^{n-1}}{2^{n-1}(a-bx)^{n-1}\sqrt{a-bx}}$$
$$+n_2\frac{1.3.b^2}{2^2(a+bx)^2\sqrt{a+bx}}\cdot\frac{1.3.5\dots(2n-5)b^{n-2}}{2^{n-2}(a-bx)^{n-2}\sqrt{a-bx}}-\dots$$

Bemerkt man, dass hier alle Glieder den gemeinschaftlichen Faktor

$$\frac{b^n}{2^n\sqrt{a^2-b^2x^2}}$$

besitzen, multiplizirt und dividirt dann noch die rechte Seite

$$\frac{1.3.5\dots(2n-1)}{(a-bx)^n(a+bx)^n},$$

so erhält man

$$D^n\left(\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}\right)=$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{1.3.5\dots(2n-1)\,b^n}{2^n(a^2-b^2x^2)^n\sqrt{a^2-b^2x^2}}\Big\{(a+bx)^n-\frac{1.n_1}{2n-1}(a+bx)^{n-1}(a-bx)\\+\frac{1.3.n_2}{(2n-1)(2n-3)}(a+bx)^{n-2}(a-bx)^2-\dots\end{aligned}\right\}\ (13)$$

womit die Aufgabe gelöst ist.

§ 15.

Die höheren Differenzialquotienten der wichtigsten transcendenten Funktionen.

I. Für die Exponenzialgrösse hat man folgende Reihe von Gleichungen;

$$\frac{d(e^{ax})}{dx}=ae^{ax}$$

$$\frac{d^2(e^{ax})}{dx^2}=a\frac{d(e^{ax})}{dx}=a^2e^{ax}$$

$$\frac{d^3(e^{ax})}{dx^3}=a^2\frac{d(e^{ax})}{dx}=a^3e^{ax}$$

u. s. f.,

also überhaupt

$$\frac{d^n(e^{ax})}{dx^n} = D^n(e^{ax}) = a^n e^{ax},$$

ein sehr einfaches Resultat.

II Die Differenziation logarithmischer Funktionen kommt immer auf die von algebraischen Funktionen zurück, weil der erste Differenzialquotient des Logarithmus eine algebraische Grösse ist. Man hat nämlich

$$\frac{dlx}{dx} = \frac{1}{x}$$

folglich

$$\frac{d^2lx}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{dx}$$

$$\frac{d^3lx}{dx^3} = \frac{d^2l\left(\frac{1}{x}\right)}{dx^2}$$

u. s. f.

d. i. im Allgemeinen

$$\frac{d^n lx}{dx^n} = \frac{d^{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)}{dx^{n-1}}$$

oder

$$D^n lx = D^{n-1}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Mithin ist nach Formel (2) § 14, wenn man daselbst $n-1$ für n setzt,

$$D^n lx = \frac{(-1)^{n-1}1.2.3....(n-1)}{x^n}, \tag{2}$$

wobei man im Falle $n = 1$ die Faktorielle $1.2...(n-1)$ für 1 zu rechnen hat, wenn die Formel allgemein gültig sein soll. — Aus der Gleichung

$$Dl(a+bx) = \frac{b}{a+bx}$$

findet man eben so leicht durch $(n-1)$malige Differenziation

$$D^n l(a+bx) = bD^{n-1}\left(\frac{1}{a+bx}\right)$$

d. i. nach Formel (5) in § 14,

$$D^n l(a+bx) = \frac{(-1)^{n-1}1.2.3...(n-1)b^n}{(a+bx)^n} \tag{3}$$

wo hinsichtlich der Faktorielle $1.2.3\ldots(n-1)$ die nämliche Bemerkung gilt, wie vorhin. — Bemerkt man, dass

$$Dl\left(\frac{a+bx}{a-bx}\right)=\frac{2ab}{a^2-b^2x^2}$$

ist, so folgt

$$D^n l\left(\frac{a+bx}{a-bx}\right) = 2ab\, D^{n-1}\,\frac{1}{a^2-b^2x^2},$$

mithin nach Artikel III in § 14

$$D^n l\left(\frac{a+bx}{a-bx}\right)=\frac{1.2.3\ldots(n-1)\,b^n}{(a^2-b^2x^2)^n}\left\{(a+bx)^n+(-1)^{n-1}(a-bx)^n\right\}, \quad (4)$$

wobei man wieder wie dort die Binome $(a+bx)^n$ und $(a-bx)^n$ entwickeln kann.

III. Von den goniometrischen Funktionen sind es nur zwei, deren höhere Differenzialquotienten sich anf dem bisherigen gewöhnlichen Wege entwickeln lassen und diess sind der Sinus und Cosinus. Für die übrigen Funktionen ist das Bildungsgesetz der höheren Differenzialquotienten nicht der Art, dass man es sogleich übersehen könnte, wodurch man genöthigt wird, sich in diesen, wie in vielen anderen Fällen nach neuen Methoden umzusehen.

Was nun den Sinus betrifft, so findet man leicht

$$\frac{d\sin x}{dx}=\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$$

$$\frac{d^2\sin x}{dx^2}=-\sin x=\sin\left(\frac{2\pi}{2}+x\right)$$

$$\frac{d^3\sin x}{dx^3}=-\cos x=\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$$

$$\frac{d^4\sin x}{dx^4}=\sin x=\sin\left(\frac{4\pi}{2}+x\right)$$

u. s. f.

Man hat also allgemein

$$\frac{d^n\sin x}{dx^n}\ D^n\sin x=\sin\left(\frac{n\pi}{2}+x\right). \quad (5)$$

Man kann sich darüber auch noch Folgendes merken. Die ganze Zahl n kann von folgenden vier Formen sein:

$$4m,\ 4m+1,\ 4m+2,\ 4m+3.$$

Für die erste ist

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}+x\right)=\sin(2m\pi+x)=\sin x,$$

für die zweite:

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}+x\right)=\sin\left(2m\pi+\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x,$$

für die dritte:

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}+x\right)=\sin\left(\overline{2m+1}\pi+x\right)=-\sin x,$$

und für die vierte:

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}+x\right)=\sin\left(2m\pi+\frac{3\pi}{2}+x\right)=-\cos x.$$

Man kann daher auch sagen: es ist

$$D^n\sin x=+\sin x,\ +\cos x,\ -\sin x,\ -\cos x,$$

wobei die vier verschiedenen Werthe den vier Formen

$$n=4m,\ 4m+1,\ 4m+2,\ 4m+3$$

correspondiren.

Man hat ganz ähnlich

$$\frac{d\cos x}{dx}=-\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$$

$$\frac{d^2\cos x}{dx^2}=-\cos x=\cos\left(\frac{2\pi}{2}+x\right)$$

$$\frac{d^3\cos x}{dx^3}=\sin x=\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$$

$$\frac{d^4\cos x}{dx^4}=\cos x=\cos\left(\frac{4\pi}{2}+x\right)$$

u. s. w.,

also im Allgemeinen:

$$\frac{d^n\cos x}{dx^n}=D^n\cos x=\cos\left(\frac{n\pi}{2}+x\right). \qquad (6)$$

Durch eine der vorigen ganz analoge Betrachtung überzeugt man sich leicht, dass diess auch so ausgedrückt werden kann: es ist

$$D^n\cos x=+\cos x,\ -\sin x,\ -\cos x,\ +\sin x,$$

je nachdem für n die Formen

$$n=4m,\ 4m+1,\ 4m+2,\ 4m+3$$

gelten.

Setzt man in den Formeln (5) und (6) ax für x, so tritt $[d(ax)]^n$

d. h. $a^n dx^n$ an die Stelle von dx^n und man bekommt dann durch beiderseitige Multiplikation mit a^n leicht die etwas allgemeineren Gleichungen:

$$D^n \sin ax = a^n \sin\left(\frac{n\pi}{2} + ax\right) \tag{7}$$

$$D^n \cos ax = a^n \cos\left(\frac{n\pi}{2} + ax\right). \tag{8}$$

IV. Die Differenziationen der cyklometrischen Funktionen reduziren sich auf die Differenziationen algebraischer Ausdrücke. Man hat nämlich

$$D \operatorname{Arcsin} \frac{b}{a} x = \frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2x^2}}$$

$$D \operatorname{Arctan} \frac{b}{a} x = \frac{ab}{a^2 + b^2x^2}$$

und daraus folgt durch $(n-1)$ malige beiderseitige Differenziation:

$$D^n \operatorname{Arcsin} \frac{b}{a} x = b\, D^{n-1} \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2x^2}}\right)$$

$$D^n \operatorname{Arctan} \frac{b}{a} x = ab\, D^{n-1} \left(\frac{1}{a^2 + b^2x^2}\right)$$

und wenn man die auf der rechten Seite angedeuteten Differenziationen dadurch ausführt, dass man in den Formeln (13) und (12) des vorigen Paragraphen $n-1$ für n setzt:

$$D^n \operatorname{Arcsin} \frac{b}{a} x = \tag{9}$$

$$\frac{1.3.5\ldots(2n-3)\,b^n}{2^{n-1}(a^2-b^2x^2)^{n-1}\sqrt{a^2-b^2x^2}} \Big\{ (a+bx)^{n-1} - \frac{1.(n-1)_1}{2n-3}(a+bx)^{n-2}(a-bx)$$

$$+ \frac{1.3.(n-1)_2}{(2n-3)(2n-5)}(a+bx)^{n-3}(a-bx)^2 \ldots \Big\}$$

und

$$D^n \operatorname{Arctan} \frac{b}{a} x = \frac{(-1)^{n-1}1.2\ldots(n-1)b^n \sin\left(n \operatorname{Arctan} \frac{a}{bx}\right)}{(a^2+b^2x^2)^{\frac{n}{2}}}. \tag{10}$$

§ 16.

Die höheren Differenzialquotienten der Funktionen von Funktionen.

Wir haben in §. 7. gesehen, dass wenn die Funktion $F(x)$ nach dem Schema

$$F(x)=f[\varphi(x)]$$

zusammengesetzt ist und zur Abkürzung $\varphi(x)=y$ genommen wird, die Gleichung gilt

$$F'(x)=f'[y]\,\varphi'(x)$$

oder vermöge der Werthe von $F(x)$ und y,

$$Df[\varphi(x)]=f'[\varphi(x)]\,\varphi'(x), \qquad (1)$$

wobei das Symbol $f'[\varphi(x)]$ bedeutet, dass man der Funktion f erst eine beliebige Variabele y leihen, nach dieser als unabhängiger Veränderlichen die Funktion $f(y)$ differenziren und endlich nach geschehener Differenziation $y=\varphi(x)$ setzen soll. Um jetzt die höheren Differenzialquotienten der Funktion $f[\varphi(x)]$ zu erhalten, differenziren wir nach einander die Gleichung (1); es wird dann

$$\begin{aligned}D^2f[\varphi(x)]&=f'[\varphi(x)]\,D\varphi'(x)+\varphi'(x)\,Df'[\varphi(x)]\\&=f'[\varphi(x)]\,\varphi''(x)+\varphi'(x)f''[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\end{aligned}$$

oder

$$D^2f[\varphi(x)]=f'[\varphi(x)]\,\varphi''(x)+f''[\varphi(x)]\,[\varphi'(x)]^2,$$

ferner:

$$\begin{aligned}D^3f[\varphi(x)]&=f'[\varphi(x)]\,D\varphi''(x)+\varphi''(x)\,Df'[\varphi(x)]\\&\quad+f''[\varphi(x)]\,D[\varphi'(x)]^2+[\varphi'(x)]^2\,Df''[\varphi(x)]\\&=f'[\varphi(x)]\,\varphi'''(x)+\varphi''(x)f''[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\\&\qquad+f''[\varphi(x)]\,2\varphi'(x)\varphi''(x)+[\varphi'(x)]^2f'''[\varphi(x)]\varphi'(x)\end{aligned}$$

oder

$$D^3f[\varphi(x)]=f'[\varphi(x)]\,\varphi'''(x)+3f''[\varphi(x)]\,\varphi''(x)\,\varphi'(x)+f'''[\varphi(x)]\,[\varphi'(x)]^3.$$

Man übersieht auf der Stelle, wie sich dieses Verfahren beliebig weit fortsetzen lässt, aber es ist nicht so leicht, das allgemeine Gesetz zu entdecken, nach welchem sich irgend ein solcher beliebig aus der Reihe herausgegriffener Differentialquotient unabhängig von allen seinen Vorgängern hinschreiben liesse. Dagegen wird dieser Calcül weit eleganter, wenn man für die Funktion $\varphi(x)$ verschiedene Spezialisirungen eintreten lässt, wobei die Funktion f immer noch ganz beliebig bleiben

kann. Die bemerkenswerthesten Fälle dieser Art sind: $\varphi(x) = x^\lambda$, wo λ eine ganz beliebige Grösse bedeutet, $\varphi(x) = e^x$ und $\varphi(x) = lx$, welche wir in den nächsten Paragraphen behandeln wollen.

§ 17.

Independente Bestimmung von $D^n f(x^\lambda)$.

Durch successive Differenziation der Funktion $f(x^\lambda)$ gelangt man leicht zu den folgenden Gleichungen:

$$Df(x^\lambda) = \lambda x^{\lambda-1} f'(x^\lambda)$$
$$D^2 f(x^\lambda) = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2} f'(x^\lambda) + \lambda^2 x^{2\lambda-2} f''(x^\lambda)$$
$$D^3 f(x^\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)x^{\lambda-3} f'(x^\lambda) + 3\lambda^2(\lambda-1)x^{2\lambda-3} f''(x^\lambda) + \lambda^3 x^{3\lambda-2} f'''(x^\lambda)$$

u. s. f.

Man übersieht bald aus dem Gange der Rechnung selbst, dass hierin im Allgemeinen folgendes Gesetz liegt:

$$D^n f(x^\lambda) = \overset{n}{A}_1 x^{\lambda-n} f'(x^\lambda) + \overset{n}{A}_2 x^{2\lambda-n} f''(x^\lambda) + \overset{n}{A}_3 x^{3\lambda-n} f'''(x^\lambda) + \ldots$$
$$\ldots + \overset{n}{A}_n x^{n\lambda-n} f^{(n)}(x^\lambda),$$

worin $\overset{n}{A}_1, \overset{n}{A}_2, \ldots \overset{n}{A}_n$ gewisse constante, blos von λ und der Ordnung der Differenziation abhängige Coefficienten bezeichnen. Man kann dafür auch schreiben:

$$D^n f(x^\lambda) =$$
$$\frac{1}{x^n}\{\overset{n}{A}_1 x^\lambda f'(x^\lambda) + \overset{n}{A}_2 x^{2\lambda} f''(x^\lambda) + \overset{n}{A}_3 x^{3\lambda} f'''(x^\lambda) + \ldots + \overset{n}{A}_n x^{n\lambda} f^{(n)}(x^\lambda)\} \quad (1)$$

und sich, wenn man will, leicht mittelst des Schlusses von n auf $n+1$ von der formellen Richtigkeit dieser Gleichung überzeugen.

Hier handelt es sich nun noch um die Bestimmung der Coefficienten

$$\overset{n}{A}_1, \overset{n}{A}_2, \overset{n}{A}_3, \ldots \overset{n}{A}_n,$$

zu welcher man durch folgende Bemerkung sehr leicht gelangen kann. Die Werthe der fraglichen Coefficienten hängen nur von λ und n, nicht aber von der Natur der Funktion f ab; ist man also im Stande, für irgend eine Spezialisirung der Funktion f die Werthe jener Coefficienten zu bestimmen, so gilt dann diese Bestimmung auch im Allgemeinen für jede andere Funktion f. Die passendeste Spezialisirung dieser Art ist:

$$f(y) = (1+y)^n, \text{ also } f(x^\lambda) = (1+x^\lambda)^n, \tag{2}$$

daraus folgt für irgend eine ganze positive Zahl p:

$$f^{(p)}(y) = n(n-1)(n-2) \dots (n-p+1)(1+y)^{n-p},$$

oder, wenn man das aus p Faktoren bestehende Produkt $n(n-1)$.. ..$(n-p+1)$ mit $[n]^p$ bezeichnet und $y = x^\lambda$ setzt,

$$f^{(p)}(x^\lambda) = [n]^p (1+x^\lambda)^{n-p}. \tag{3}$$

Nimmt man hier $p = 1, 2, 3, \dots n$, so kann man alle auf der rechten Seite von der Gleichung (1) vorkommenden derivirten Funktionen angeben, wodurch man erhält:

$$D^n(1+x^\lambda)^n =$$
$$\frac{1}{x^n}\{\overset{n}{A}_1[n]^1 x^\lambda(1+x^\lambda)^{n-1} + \overset{n}{A}_2[n]^2 x^{2\lambda}(1+x^\lambda)^{n-2} + \overset{n}{A}_3[n]^3 x^{3\lambda}(1+x^\lambda)^{n-3} + \dots$$
$$\dots + \overset{n}{A}_n[n]^n x^{n\lambda}\}. \tag{4}$$

Andererseits kann man den Werth der linken Seite auch noch auf einem anderen, von der Kenntniss des Theoremes (1) unabhängigem Wege erhalten; bezeichnet man nämlich die Coeffizienten von z, z^2, z^3 etc. in der Reihe für $(1+z)^n$ mit n_1, n_2, n_3 etc., so ist

$$(1+x^\lambda)^n$$
$$= 1 + n_1 x^\lambda + n_2 x^{2\lambda} + n_3 x^{3\lambda} + \dots + n_n x^{n\lambda}$$

und wenn man die Formel

$$D^n x^\mu = \mu(\mu-1)(\mu-2)\dots(\mu-n+1)\, x^{\mu-n} = [\mu]^n \frac{x^\mu}{x^n}$$

benutzt, so folgt aus dem Vorhergehenden:

$$D^n(1+x^\lambda)^n =$$
$$\frac{1}{x^n}\{n_1[\lambda]^n x^\lambda + n_2[2\lambda]^n x^{2\lambda} + n_3[3\lambda]^n x^{3\lambda} + \dots + n_n[n\lambda]^n x^{n\lambda}\}.$$

Vergleichen wir dies mit dem unter No. (2) gefundenen Resultate, und setzen zur Abkürzung $x^\lambda = y$, so wird

$$n_1[\lambda]^n y + n_2[2\lambda]^n y^2 + n_3[3\lambda]^n y^3 + \dots + n_n[n\lambda]^n y^n$$
$$= \overset{n}{A}_1[n]^1 y(1+y)^{n-1} + \overset{n}{A}_2[n]^2 y^2(1+y)^{n-2} + \overset{n}{A}_3[n]^3 y^3(1+y)^{n-3} + \dots$$
$$\dots + \overset{n}{A}_{n-1}[n]^{n-1} y^{n-1}(1+y) + \overset{n}{A}_n[n]^n y^n.$$

Aus dieser Gleichung, welche für jedes y eine blosse Identität darstellen muss, lassen sich leicht Relationen ableiten, welche zur Bestimmung der Coeffizienten

$$\overset{n}{A}_1, \overset{n}{A}_2, \overset{n}{A}_3, \ldots. \overset{n}{A}_n$$

hinreichen. Verwandelt man nämlich die einzelnen Potenzen

$$(1+y)^{n-1}, (1+y)^{n-2}, (1+y)^{n-3}, \ldots.$$

in Reihen, welche nach Potenzen von y fortschreiten, so ist:

$$\begin{aligned} & n_1[\lambda]^{n} y + n_2[2\lambda]^{n} y^2 + n_3[3\lambda]^{n} y^3 + \ldots\ldots + n_n[n\lambda]^{n} y^n \\ = & \overset{n}{A}_1[n]^{1}\{y+(n-1)_1 y^2 + (n-1)_2 y^3 + \ldots\ldots + (n-1)_{n-1} y^n\} \\ + & \overset{n}{A}_2[n]^{2}\{y^2+(n-2)_1 y^3 + (n-2)_2 y^4 + \ldots\ldots + (n-2)_{n-2} y^n\} \\ + & \overset{n}{A}_3[n]^{3}\{y^3+(n-3)_1 y^4 + (n-3)_2 y^5 + \ldots\ldots + (n-3)_{n-3} y^n\} \\ + & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + & \overset{n}{A}_{n-1}[n]^{n-1}\{y^{n-1}+1_1 y^n\} \\ + & \overset{n}{A}_n[n]^{n} y^n \end{aligned}$$

Ordnet man hier die verschiedenen Glieder nach Potenzen von x, so nimmt die Gleichung folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} & n_1[\lambda]^{n} y + n_2[2\lambda]^{n} y^2 + n_3[3\lambda]^{n} y^3 + \ldots\ldots + n_n[n\lambda]^{n} y^n \\ = & \overset{n}{A}_1[n]^{1} y \\ + & \{\overset{n}{A}_1[n]^{1}(n-1)_1 + \overset{n}{A}_2[n]^{2}\} y^2 \\ + & \{\overset{n}{A}_1[n]^{1}(n-1)_2 + \overset{n}{A}_2[n]^{2}(n-2)_1 + \overset{n}{A}_3[n]^{3}\} y^3 \\ + & \{\overset{n}{A}_1[n]^{1}(n-1)_3 + \overset{n}{A}_2[n]^{2}(n-2)_2 + \overset{n}{A}_3[n]^{3}(n-3)_1 + \overset{n}{A}_4[n]^{4}\} y^4 \\ + & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + & \{\overset{n}{A}_1[n]^{1}(n-1)_{n-1} + \overset{n}{A}_2[n]^{2}(n-2)_{n-2} + \ldots. + \overset{n}{A}_{n-1}[n]^{n-1} 1_1 + \overset{n}{A}_n[n]^{n}\} y^n. \end{aligned}$$

Da diese Gleichung für jedes beliebige y eine rein identische sein muss, so ist nöthig, dass die Coeffizienten gleicher Potenzen von y selbst identisch sind, dass also folgende Gleichungen gelten:

$$\begin{aligned} n_1[\lambda]^{n} &= \overset{n}{A}_1[n]^{1} \\ n_2[2\lambda]^{n} &= \overset{n}{A}_1[n]^{1}(n-1)_1 + \overset{n}{A}_2[n]^{2} \end{aligned}$$

$$n_3[3\lambda]^n = \overset{n}{A}_1 [n]^1 (n-1)_2 + \overset{n}{A}_2 [n]^2 (n-2)_1 + \overset{n}{A}_3 [n]^3$$
$$n_4[4\lambda]^n = \overset{n}{A}_1 [n]^1 (n-1)_3 + \overset{n}{A}_2 [n]^2 (n-2)_2 + \overset{n}{A}_3 [n]^3 (n-3)_1 + \overset{n}{A}_4 [n]^4$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$n_n[n\lambda]^n = \overset{n}{A}_1 [n]^1 (n-1)_{n-1} + \overset{n}{A}_2 [n]^2 (n-2)_{n-2} + \ldots + \overset{n}{A}_{n-1} [n]^{n-1} 1_1 + \overset{n}{A}_n [n]^n.$$

Setzt man für jeden Binomialkoeffizienten seinen Werth nach der Formel

$$m_q = \frac{m(m-1)\ldots(m-q+1)}{1.2\ldots q}$$

und für $[n]^1$, $[n]^2$, $[n]^3$ etc. ihre Werthe n, $n(n-1)$, $n(n-1)(n-2)$ etc., so erkennt man, dass sich die erste Gleichung durch n aufdiviren lässt, die zweite durch $n(n-1)$, die dritte durch $n(n-1)(n-2)$ etc., die letzte durch $n(n-1)\ldots2.1$. Nach Ausführung dieser Divisionen bleibt:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{[\lambda]^n}{1} &= \overset{n}{A}_1 \\
\frac{[2\lambda]^n}{1.2} &= \frac{1}{1}\overset{n}{A}_1 + \overset{n}{A}_2 \\
\frac{[3\lambda]^n}{1.2.3} &= \frac{1}{1.2}\overset{n}{A}_1 + \frac{1}{1}\overset{n}{A}_2 + \overset{n}{A}_3 \\
\frac{[4\lambda]^n}{1.2.3.4} &= \frac{1}{1.2.3}\overset{n}{A}_1 + \frac{1}{1.2}\overset{n}{A}_2 + \frac{1}{1}\overset{n}{A}_3 + \overset{n}{A}_4 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{[n\lambda]^n}{1.2.3\ldots n} &= \frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\overset{n}{A}_1 + \frac{1}{1.2\ldots(n-2)}\overset{n}{A}_2 + \ldots + \frac{1}{1}\overset{n}{A}_{n-1} + \overset{n}{A}_n.
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Diese n Gleichungen reichen hin, um die n Unbekannten

$$\overset{n}{A}_1, \overset{n}{A}_2, \overset{n}{A}_3, \ldots \overset{n}{A}_n$$

zu bestimmen. Da wir später noch eine ähnliche Aufgabe zu behandeln haben werden, so schalten wir hier die Lösung des folgenden etwas allgemeineren Problemes ein:

„Seien k_1, k_2, k_3, ... k_n bekannte, x_1, x_2, x_3, ... x_n unbekannte Grössen und zwischen beiden die Gleichungen gegeben:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{k_1}{1}=x_1\\
&\frac{k_2}{1.2}=\frac{x_1}{1}+x_2\\
&\frac{k_3}{1.2.3}=\frac{x_1}{1.2}+\frac{x_2}{1}+x_3\\
&\frac{k_4}{1.2.3.4}=\frac{x_1}{1.2.3}+\frac{x_2}{1.2}+\frac{x_3}{1}+x_4\\
&\quad\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
&\frac{k_n}{1.2....n}=\frac{x_1}{1.....(n-1)}+\frac{x_2}{1.2....(n-2)}+....+\frac{x_{n-1}}{1}+x_n
\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

man soll hieraus die Unbekannten eliminiren."

Wollte man irgend eine der Unbekannten, etwa x_p, wo p eine der Zahlen $1, 2, \ldots n$ ist, bestimmen, so könnte man hierzu folgenden Weg einschlagen: Man schreibe die p Gleichungen hin:

$$\begin{aligned}
&\frac{k_1}{1}=x_1\\
&\frac{k_2}{1.2}=\frac{x_1}{1}+x_2\\
&\frac{k_3}{1.2.3}=\frac{x_1}{1.2}+\frac{x_2}{1}+x_3\\
&\quad\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
&\frac{k_p}{1.2\ldots p}=\frac{x_1}{1.2\ldots(p-1)}+\frac{x_2}{1.2\ldots(p-2)}+\ldots+\frac{x_{p-1}}{1}+x_p
\end{aligned}$$

dann kommt x_p nur in der letzten vor; substituirt man also jede Gleichung in die nächstfolgende, so muss man zuletzt x_p erhalten. Um jedoch den mit diesem Verfahren nothwendig verbundenen Umständlichkeiten zu entgehen, wollen wir eine andere viel expeditivere Methode anwenden. Wir multipliziren nämlich die erste, zweite, dritte Gleichung u. s. f. mit den correspondirenden Faktoren:

$$\frac{p_1}{2.3\ldots p},\quad \frac{p_2}{3.4\ldots p},\quad \frac{p_3}{4.5\ldots p},\quad \ldots.\quad \frac{p_{p-1}}{p},\quad p_p,$$

und nehmen hierauf Alles mit wechselnden Vorzeichen zusammen; es ergiebt sich so

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{k_1}{1}\frac{p_1}{2.3\ldots p}-\frac{k_2}{1.2}\frac{p_2}{3.4\ldots p}+\frac{k_3}{1.2.3}\frac{p_3}{4.5\ldots p}-\ldots\ldots \\
&=x_1\left\{\frac{p_1}{2.3\ldots p}-\frac{1}{1}\frac{p_2}{3.4\ldots p}+\frac{1}{1.2}\frac{p_3}{4.5\ldots p}-\ldots\ldots\right\} \\
&-x_2\left\{\frac{p_2}{3.4\ldots p}-\frac{1}{1}\frac{p_3}{4.5\ldots p}+\frac{1}{1.2}\frac{p_4}{5.6\ldots p}-\ldots\ldots\right\} \\
&+x_3\left\{\frac{p_3}{4.5\ldots p}-\frac{1}{1}\frac{p_4}{5.6\ldots p}+\frac{1}{1.2}\frac{p_5}{6.7\ldots p}-\ldots\ldots\right\} \\
&-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\qquad+(-1)^p x_{p-1}\left\{\frac{p_{p-1}}{p}-\frac{1}{1}p_p\right\} \\
&\qquad\qquad+(-1)^{p+1}x_p\,p_p.
\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Sämmtliche hier vorkommende Horizontalreihen stehen unter folgender allgemeinen Form:

$$(-1)^{q+1}x_q\left\{\frac{p_q}{(q+1)\ldots p}-\frac{1}{1}\frac{p_{q+1}}{(q+2)\ldots p}+\frac{1}{1.2}\frac{p_{q+2}}{(q+3)\ldots p}-\ldots,\right\}$$

in welcher q eine ganze positive Zahl bedeutet, und gehen daraus hervor, wenn man q nach einander $= 1,\ 2,\ldots p$ setzt. Diese allgemeine Reihe ist auch gleich der folgenden:

$$\frac{(-1)^{q+1}x_q}{(q+1)\ldots p}\left\{p_q-\frac{q+1}{1}p_{q+1}+\frac{(q+1)(q+2)}{1.2}p_{q+2}-\ldots\ldots\right\}$$

Bemerkt man, dass

$$p_{q+1}=\frac{p-q}{q+1}p_q\ ,\ p_{p+2}=\frac{(p-q)(p-q-1)}{(q+1)(q+2)}\ p_q,\ \ldots\ldots$$

ist, so geht dieselbe über in

$$\frac{(-1)^{q+1}p_q x_q}{(q+1)\ldots p}\left\{1-\frac{p-q}{1}+\frac{(p-q)(p-q-1)}{1.2}-\ldots\ldots\right\}$$

Die eingeklammerte Reihe ist aber die der Binomialkoeffizienten des Exponenten $p-q$, nämlich

$$(p-q)_0-(p-q)_1+(p-q)_2-\ldots\ldots$$

und ihre Summe ist bekanntlich Null, sobald $p-q$ selbst nicht Null, also q von p verschieden ist, dagegen der Einheit gleich, sobald $q=p$, weil sich dann die Reihe auf ihr erstes Glied reduzirt. Es verschwinden also in der Gleichung (7) alle diejenigen Horizontalreihen, in welchen die Indices von x kleiner als p sind, und es bleibt nur ein einziges Glied stehen, nämlich das letzte. Da $p_p = 1$, so folgt nun

$$\frac{1}{1.2.3\ldots p}\{k_1 p_1 - k_2 p_2 + k_3 p_3 - \ldots + (-1)^{p+1} k_p p_p\} = (-1)^{p+1} x_p, \quad (8)$$

wofür man auch bei umgekehrter Anordnung der Reihe unter der Bemerkung, dass $p_p = 1$, $p_{p-1} = p_1$, $p_{p-2} = p_2$ etc. ist, schreiben kann

$$x_p = \frac{1}{1.2.3\ldots p}\{k_p - p_1 k_{p-1} + p_2 k_{p-2} - \ldots + (-1)^{p+1} p_{p-1} k_1\}, \quad (9)$$

womit der Werth irgend einer Unbekannten gefunden ist. Die n Unbekannten, welche den n Gleichungen sub no. (6) genügen, erhält man folglich, wenn man in einer der Formeln (8) oder (9) für p der Reihe nach $1, 2, 3, \ldots n$ setzt.

Nach dieser Digression kehren wir wieder zu der Aufgabe zurück, aus den Gleichungen unter no. (5) die Werthe der n mit A bezeichneten Coeffizienten zu bestimmen. Dieselbe ist nur derjenige spezielle unseres so eben behandelten allgemeineren Problemes, in welchem man überhaupt

$$k_p = [p\lambda]^{n}, \quad x_p = \overset{n}{A}_p$$

setzt, woraus sich nach den Formeln (8) und (9) ergiebt

$$\overset{n}{A}_p = \frac{(-1)^{p+1}}{1.2\ldots p}\{p_1 [\lambda]^{n} - p_2 [2\lambda]^{n} + p_3 [3\lambda]^{n} - \ldots\} \quad (10)$$

oder

$$\overset{n}{A}_p = \frac{1}{1.2\ldots p}\{[p\lambda]^{n} - p_1 [\overline{p-1}\,\lambda]^{n} + p_2 [\overline{p-2}\,\lambda]^{n} - \ldots\} \quad (11)$$

Will man statt der Symbole $[\lambda]^{n}$, $[2\lambda]^{n}, \ldots [\overline{p-1}\,\lambda]^{n}$, $[p\lambda]^{n}$ lieber Binomialkoeffizienten sehen, was für die numerische Rechnung desswegen bequemer ist, weil man für die Binomialkoefficienten Tafeln besitzt, so bemerke man, dass überhaupt

$$[\mu]^{n} = \mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1) = 1.2.3\ldots n.\mu_n$$

ist, woraus folgt

$$\overset{n}{A}_p = \frac{(-1)^{p+1} 1.2\ldots n}{1.2.3\ldots p}\{p_1 \lambda_n - p_2 (2\lambda)_n + p_3 (3\lambda)_n - \ldots\} \quad (12)$$

oder

$$\overset{n}{A}_p = \frac{1.2.3\ldots n}{1.2.3\ldots p}\{(p\lambda)_n - p_1 (\overline{p-1}\,\lambda)_n + p_2 (\overline{p-2}\,\lambda)_n - \ldots\} \quad (13)$$

Für die hierdurch bestimmten Werthe der Grössen

$$\overset{n}{A}_1, \overset{n}{A}_2, \ldots \overset{n}{A}_n$$

ist nun nach no. (1)

$$D^n f(x^\lambda) = \qquad (14)$$
$$\frac{1}{x^n}\left\{\overset{n}{A}_1 x^\lambda f'(x^\lambda) + \overset{n}{A}_2 x^{2\lambda} f''(x^\lambda) + \overset{n}{A}_3 x^{3\lambda} f'''(x^\lambda) + \ldots + \overset{n}{A}_n x^{n\lambda} f^{(n)}(x^\lambda)\right\}$$

womit unser Problem gelöst ist.

Wählt man die Funktion f so, dass man die derivirten Funktionen $f'(y)$, $f''(y)$, ... $f^{(n)}(y)$, mithin auch $f'(x^\lambda)$, $f''(x^\lambda)$,...$f^{(n)}x(^\lambda)$ unmittelbar angeben kann, so gelangt man mittelst der obigen Relationen immer zu völlig entwickelten Formeln.

§ 18.

Beispiele für das allgemeine Theorem im vorigen Paragraphen.

Für die Anwendungen des Theoremes (14) im vorigen Paragraphen ist es bequem, eine kleine Umänderung hinsichtlich des $\overset{n}{A}_p$ vorzunehmen. Setzt man nämlich

$$\overset{n}{E}_p = [p\lambda]^n - p_1 [\overline{p-1}\lambda]^n + p_2 [\overline{p-2}\lambda]^n - \ldots \qquad (1)$$

oder

$$\overset{n}{E}_p = 1.2\ldots n\{(p\lambda)_n - p_1(\overline{p-1}\lambda)_n + p_2(\overline{p-2}\lambda)_n - \ldots\} \qquad (2)$$

so wird

$$\overset{n}{A}_p = \frac{1}{1.2\ldots p}\overset{n}{E}_p$$

und folglich

$$\left.\begin{aligned} D^n f(x^\lambda) = \frac{1}{x^n}\Big\{\frac{1}{1}\overset{n}{E}_1\, x^\lambda f'(x^\lambda) + \frac{1}{1.2}\overset{n}{E}_2\, x^{2\lambda} f''(x^\lambda) + \frac{1}{1.2.3}\overset{n}{E}_3 x^{3\lambda} f'''(x^\lambda) + \ldots \\ \ldots + \frac{1}{1.2.3..n}\overset{n}{E}_n x^{n\lambda} f^{(n)}(x^\lambda). \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Als Beispiele sind folgende Annahmen von Interesse.

I. Es sei $f(y) = (a+y)^\mu$ folglich

$$f^{(p)}(y) = \mu(\mu-1)\ldots(\mu-p+1)(a+y)^{\mu-p},$$

so findet man

$$\frac{1}{1.2..p}\overset{n}{E}_p f^{(p)}(x^\lambda) = \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-p+1)}{1.2\ldots p}\cdot\frac{(a+x^\lambda)^\mu}{(a+x^\lambda)^p}$$

und

$$\frac{1}{1.2..p}\overset{n}{E}_p x^{p\lambda} f^{(p)}(x^\lambda) = (a+x^\lambda)^\mu \mu_p \left(\frac{x^\lambda}{a+x^\lambda}\right)^p,$$

folglich

$$D^n (a+x^\lambda)^\mu = \tag{4}$$
$$\frac{(a+x^\lambda)^\mu}{x^n}\left\{\mu_1 \overset{n}{E}_1\left(\frac{x^\lambda}{a+x^\lambda}\right) + \mu_2 \overset{n}{E}_2\left(\frac{x^\lambda}{a+x^\lambda}\right)^2 + \dots + \mu_n \overset{n}{E}_n\left(\frac{x^\lambda}{a+x^\lambda}\right)^n\right\}$$

ein durch seine Eleganz bemerkenswerthes Resultat.

II. Für $f(y)=e^y$ wird auch

$$f^{(p)}(y)=e^y \quad , \quad f^{(p)}(x^\lambda)=e^{x^\lambda},$$

mithin

$$\left.\begin{array}{c} D^n(e^{x^\lambda}) = \\ \frac{1}{x^n}\left\{\overset{n}{E}_1 \frac{x^\lambda}{1} + \overset{n}{E}_2 \frac{x^{2\lambda}}{1.2} + \dots + \overset{n}{E}_n \frac{x^{n\lambda}}{1.3..n}\right\} e^{x^\lambda}. \end{array}\right\} \tag{5}$$

III. Wenn $f(y)=l(a+y)$ genommen wird, ergiebt sich

$$f^{(p)}(y) = \frac{1.2.3\dots(p-1)}{(a+y)^p}(-1)^{p-1},$$

folglich

$$\frac{1}{1.2\dots p}\overset{n}{E}_p x^{p\lambda} f^{(p)}(x^\lambda) = \frac{1}{p}\overset{n}{E}_p\left(\frac{x^\lambda}{a+x^\lambda}\right)^p$$

und hiernach wird

$$\left.\begin{array}{c} D^n\, l(a+x^\lambda) = \\ \frac{1}{x^n}\left\{\frac{1}{1}\overset{n}{E}_1\left(\frac{x^\lambda}{a+x^\lambda}\right) - \frac{1}{2}\overset{n}{E}_2\left(\frac{x^\lambda}{a+x^\lambda}\right)^2 + \dots \pm \frac{1}{1}\overset{n}{E}_n\left(\frac{x^\lambda}{a+x^\lambda}\right)^n\right\}. \end{array}\right\} \tag{6}$$

IV. Man kann aus den hier entwickelten Formeln auch leicht Eigenschaften der Coeffizienten $\overset{n}{E}_1$, $\overset{n}{E}_2$ etc. ableiten, sobald man die Funktion f so weit spezialisirt, dass sich der Werth von $D^n f(x^\lambda)$ auf der linken Seite ganz unmittelbar angeben lässt. Diess ist z. B. in Formel (4) für $a=0$ der Fall; dann steht auf der linken Seite:

$$D^n x^{\lambda\mu} = \lambda\mu(\lambda\mu-1)\dots(\lambda\mu-n+1)\, x^{\lambda\mu-n},$$

worauf nach beiderseitiger Hebung mit $x^{\lambda\mu-n}$ die Relation folgt:

$$\left.\begin{array}{c} \lambda\mu(\lambda\mu-1)\dots(\lambda\mu-n+1) \\ = \mu_1\overset{n}{E}_1 + \mu_2\overset{n}{E}_2 + \mu_3\overset{n}{E}_3 + \dots + \mu_n\overset{n}{E}_n. \end{array}\right\} \tag{7}$$

Ebenso leicht erhält man aus no. (6) für $a=0$ die Gleichung

$$\left.\begin{aligned}&(-1)^{n-1}\lambda.1.2.3\ldots(n-1)\\ &=\frac{1}{1}\overset{n}{E}_1-\frac{1}{2}\overset{n}{E}_2+\frac{1}{3}\overset{n}{E}_3-\ldots\pm\frac{1}{n}\overset{n}{E}_n\end{aligned}\right\}\qquad(8)$$

die man auch dadurch aus der Relation (7) ableiten kann, dass man beiderseits mit μ dividirt und darauf zur Gränze für unbegränzt abnehmende μ übergeht.

V. Noch haben wir zu erwähnen, dass die Formel (4) einer Transformation fähig ist, wodurch sie in eine für den praktischen Gebrauch oft bequemere Gestalt übergeführt wird. Diese Umformung beruht hauptsächlich auf dem folgenden Satze: wenn für ein ganzes positives s der Ausdruck

$$\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-s+1)}{1.2.3\ldots s},$$

wie bisher immer mit μ_s bezeichnet wird, so lässt sich für ein ganzes positives ν aber völlig beliebige α und β die Summe der Reihe

$$\alpha_\nu\beta_0+\alpha_{\nu-1}\beta_1+\alpha_{\nu-2}\beta_2+\ldots+\alpha_1\beta_{\nu-1}+\alpha_0\beta_\nu\qquad(9)$$

wieder durch eine Grösse der obigen Form ausdrücken. Zunächst beachte man nämlich folgende identische Gleichungen

$$\begin{aligned}\frac{\alpha+\beta-\nu}{\nu+1}&=\frac{\alpha-\nu}{\nu+1}+\frac{\beta}{\nu+1}\\ &=\frac{\alpha-\overline{\nu-1}}{\nu+1}+\frac{\beta-1}{\nu+1}\\ &=\frac{\alpha-\overline{\nu-2}}{\nu+1}+\frac{\beta-2}{\nu+1}\\ &\quad\ldots\ldots\ldots\\ &=\frac{\alpha-1}{\nu+1}+\frac{\beta-\overline{\nu-1}}{\nu+1}\\ &=\frac{\alpha}{\nu-1}+\frac{\beta-\nu}{\nu+1}\end{aligned}$$

und multiplizire nun die Reihe in (9), deren Summe γ_ν heissen möge, mit der Grösse $\frac{\alpha+\beta-\nu}{\nu+1}$, wobei man im ersten Gliede die erste Form dieses Quotienten, im zweiten Gliede die zweite Form u. s. f. anwendet. Man erhält so

$$\frac{\alpha+\beta-\nu}{\nu+1}\gamma_\nu = \frac{\alpha-\nu}{\nu+1}\alpha_\nu\beta_0 + \frac{\beta}{\nu+1}\alpha_\nu\beta_0$$
$$+\frac{\alpha-\overline{\nu-1}}{\nu+1}\alpha_{\nu-1}\beta_1 + \frac{\beta-1}{\nu+1}\alpha_{\nu-1}\beta_1$$
$$+\frac{\alpha-\overline{\nu-2}}{\nu+1}\alpha_{\nu-2}\beta_2 + \frac{\beta-1}{\nu+1}\alpha_{\nu-2}\beta_2$$
$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$
$$+\frac{\alpha-1}{\nu+1}\alpha_1\beta_{\nu-1} + \frac{\beta-\overline{\nu-1}}{\nu+1}\alpha_1\beta_{\nu-1}$$
$$+\frac{\alpha}{\nu+1}\alpha_0\beta_\nu + \frac{\beta-\nu}{\nu+1}\alpha_0\beta_\nu.$$

Nach der Definition von μ_s ist aber

$$\frac{\mu-s}{s+1}\mu_s=\mu_{s+1} \text{ oder } (\mu-s)\mu_s=(s+1)\mu_{s+1}$$

und diese Formel kann man hier in jedem Gliede anwenden, in der ersten Colonne nämlich der Reihe nach für $\mu=\alpha$, $s=\nu$, $\nu-1$, $\nu-2$, ..1,0 und in der zweiten für $\mu=\beta$, $s=0, 1, 2, \ldots \nu$. So erhält man

$$\frac{\alpha+\beta-\nu}{\nu+1}\gamma_\nu=\alpha_{\nu+1}\beta_0+\frac{1}{\nu+1}\alpha_\nu\beta_1$$
$$+\frac{n}{\nu+1}\alpha_\nu\beta_1 + \frac{2}{\nu+1}\alpha_{\nu-1}\beta_2$$
$$+\frac{n-1}{\nu+1}\alpha_{\nu-1}\beta_2 + \frac{3}{\nu+1}\alpha_{\nu-2}\beta_3$$
$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$
$$+\frac{2}{\nu+1}\alpha_2\beta_{\nu-1} + \frac{\nu}{\nu+1}\alpha_1\beta_\nu$$
$$+\frac{1}{\nu+1}\alpha_1\beta_\nu + \alpha_0\beta_{\nu+1},$$

und wenn man die Glieder mit gleichen Faktoren vereinigt

$$\frac{\alpha+\beta-\nu}{\nu+1}\gamma_\nu$$
$$=\alpha_{\nu+1}\beta_0+\alpha_\nu\beta_1+\alpha_{\nu-1}\beta_2+\ldots+\alpha_1\beta_\nu+\alpha_0\beta_{\nu-1}.$$

Die Reihe auf der rechten Seite unterscheidet sich aber von der in no. (9) nur dadurch, dass hier $\nu+1$ steht, wo dort ν; ihre Summe muss demnach mit $\gamma_{\nu+1}$ bezeichnet werden, so dass jetzt

$$\gamma_{\nu+1}=\frac{\alpha+\beta-\nu}{\nu+1}\gamma_\nu$$

ist. Schreibt man für ν der Reihe nach $0, 1, 2, \ldots \nu-1$, so erhält man die folgenden Relationen

$$\gamma_1 = \frac{\alpha+\beta}{1}\gamma_0$$

$$\gamma_2 = \frac{\alpha+\beta-1}{2}\gamma_1$$

$$\gamma_3 = \frac{\alpha+\beta-2}{3}\gamma_2$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\gamma_\nu = \frac{\alpha+\beta-\nu-1}{\nu}\gamma_{\nu-1}$$

und durch Multiplikation aller dieser Gleichungen nach Hebung von $\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_{\nu-1}$

$$\gamma_\nu = \frac{\alpha+\beta}{1}\cdot\frac{\alpha+\beta-1}{2}\cdot\frac{\alpha+\beta-2}{3}\cdots\frac{\alpha+\beta-\overline{\nu-1}}{\nu}\gamma_0.$$

Nun reduzirt sich aber die Reihe (9) für $\nu=0$ auf ihr erstes Glied $\alpha_0\beta_0=1$, mithin ist $\gamma_0=1$ und somit γ_ν bestimmt. Da diese Faktorenfolge offenbar nach der Analogie von μ_s mit $(\alpha+\beta)_\nu$ bezeichnet werden kann, so ergiebt sich jetzt das sehr wichtige Theorem

$$\alpha_\nu\beta_0+\alpha_{\nu-1}\beta_1+\alpha_{\nu-2}\beta_2+\ldots+\alpha_1\beta_{\nu-1}+\alpha_0\beta_\nu$$
$$=(\alpha+\beta)_\nu. \qquad (10).$$

Dasselbe lässt sich noch in einer etwas anderen Gestalt darstellen, wenn man α negativ nimmt und bemerkt, dass überhaupt immer

$$(-\mu)_s=(-1)^s\frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+s-1)}{1.2.3\ldots s}$$
$$=(-1)^s\frac{(\mu+s-1)(\overline{\mu+s-1}-1)(\overline{\mu+s-1}-2)\ldots(\overline{\mu+s-1}-\overline{s-1})}{1.2.3\ldots s}$$

oder

$$(-\mu)_s=(-1)^s(\mu+s-1)_s$$

ist. Man erhält nämlich

$$(-1)^\nu\{(\alpha+\nu-1)_\nu\beta_0-(\alpha+\nu-2)_{\nu-1}\beta_1+(\alpha+\nu-3)_{\nu-2}\beta_2-\ldots\}$$
$$=(-\alpha+\beta)_\nu$$

oder weil $(-\alpha+\beta)_\nu=(-\overline{\alpha-\beta})_\nu=(-1)^\nu(\alpha-\beta+\nu-1)_\nu$ ist, wenn man beiderseits $\alpha+1$ für α setzt,

$$(\alpha+\nu)_\nu \beta_0 - (\alpha+\nu-1)_{\nu-1} \beta_1 + (\alpha+\nu-2)_{\nu-2} \beta_2 - \ldots \pm \alpha_0 \beta_\nu = (\alpha-\beta+\nu)_\nu \quad (11)$$

und von diesem Satze werden wir nun sogleich Gebrauch machen.

Der Zweck der Transformation, welche wir mit der Gleichung (4) vornehmen wollen, besteht darin, alle Grössen, welche auf der rechten Seite vorkommen, über gleichen Nenner zu bringen, so dass innerhalb der Parenthese nur eine nach Potenzen von x^λ fortschreitende Reihe übrig bleibt. Wir stellen daher die Gleichung selbst in folgende Form:

$$D^n (a+x^\lambda)^\mu \quad (12)$$
$$= \frac{(a+x^\lambda)^{\mu-n}}{x^n} \left\{ \mu_1 \overset{n}{E}_1 x^\lambda (a+x^\lambda)^{n-1} + \mu_2 \overset{n}{E}_2 x^{2\lambda} (a+x^\lambda)^{n-2} + \mu_3 \overset{n}{E}_3 x^{3\lambda} (a+x^\lambda)^{n-3} + \ldots + \mu_n \overset{n}{E}_n x^{n\lambda} \right\}$$

und entwickeln die einzelnen Potenzen mit Hülfe des binomischen Satzes. Die Reihe innerhalb der Parenthese wird dann gleich

$$\mu_1 \overset{n}{E}_1 [(n-1)_0 a^{n-1} x^\lambda + (n-1)_1 a^{n-2} x^{2\lambda} + (n-1)_2 a^{n-3} x^{3\lambda} + \ldots]$$
$$+ \mu_2 \overset{n}{E}_2 [(n-2)_0 a^{n-2} x^{2\lambda} + (n-2)_1 a^{n-3} x^{3\lambda} + \ldots]$$
$$+ \mu_3 \overset{n}{E}_3 [(n-2)_0 a^{n-3} x^{3\lambda} + \ldots]$$
$$+ \ldots\ldots$$

Nimmt man alle Glieder in vertikaler Richtung zusammen, so kann man dieselben in folgende Form bringen:

$$\overset{n}{G}_1 a^{n-1} x^\lambda + \overset{n}{G}_2 a^{n-2} x^{2\lambda} + \overset{n}{G}_3 a^{n-3} x^{3\lambda} + \ldots.$$

wobei zur Abkürzung gesetzt worden ist:

$$\overset{n}{G}_1 = \mu_1 \overset{n}{E}_1 (n-1)_0$$
$$\overset{n}{G}_2 = \mu_1 \overset{n}{E}_1 (n-1)_1 + \mu_2 \overset{n}{E}_2 (n-2)_0$$
$$\overset{n}{G}_3 = \mu_1 \overset{n}{E}_1 (n-1)_2 + \mu_2 \overset{n}{E}_2 (n-2)_1 + \mu_3 \overset{n}{E}_3 (n-3)_0$$

u. s. f.

Nach Nr. (12) haben wir nun

$$D^n (a+x^\lambda)^\mu$$
$$= \frac{(a+x^\lambda)^{\mu-n}}{x^n} \left\{ \overset{n}{G}_1 a^{n-1} x^\lambda + \overset{n}{G}_2 a^{n-2} x^{2\lambda} + \ldots + \overset{n}{G}_n a^0 x^{n\lambda} \right\} \quad (13)$$

Die mit G bezeichneten Coeffizienten können übrigens in einer kürzeren Form dargestellt werden; nach den vorhergehenden Gleichungen hat man nämlich für ein ganzes positives p:

$$\overset{n}{G}_p = \mu_1 \overset{n}{E}_1 (n-1)_{p-1} + \mu_2 \overset{n}{E}_2 (n-2)_{p-2} + \mu_3 \overset{n}{E}_3 (n-3)_{p-3} + \ldots,$$

wobei man die Reihe nur soweit fortzusetzen braucht, bis sie von selbst abbricht, was mit dem Gliede $(n-p)_{p-p}$ der Fall ist. Schreibt man die Reihe in umgekehrter Ordnung, so wird

$$\overset{n}{G}_p = \mu_p \overset{n}{E}_p (n-p)_0 + \mu_{p-1} \overset{n}{E}_{p-1} (n-p+1)_1 + \mu_{p-2} \overset{n}{E}_{p-2} (n-p+2)_2 + \ldots,$$

und wenn man für die mit E bezeichneten Grössen ihre Werthe setzt:

$$\begin{aligned} \overset{n}{G}_p = & \\ & \mu_p (n-p)_0 \{ p_0 [p\lambda]^n - p_1 [\overline{p-1}\lambda]^n + p_2 [\overline{p-2}\lambda]^n - \ldots \} \\ & + \mu_{p-1} (n-p+1)_1 \{ (p-1)_0 [\overline{p-1}\lambda]^n - (p-1)_1 [\overline{p-2}\lambda]^n + \ldots \} \\ & + \mu_{p-2} (n-p+2)_2 \{ (p-2)_0 [\overline{p-2}\lambda]^n - \ldots \} \\ & + \ldots \ldots \ldots \end{aligned}$$

Addirt man hier in vertikaler Richtung und setzt zur Abkürzung:

$$\begin{aligned} g_0 &= \mu_p (n-p)_0 p_0 \\ g_1 &= \mu_{p-1} (n-p+1)_1 (p-1)_0 - \mu_p (n-p)_0 p_1 \\ g_2 &= \mu_{p+2} (n-p+2)_2 (p-2)_0 - \mu_{p-1} (n-p+1)_1 (p-1)_1 + \mu_p (n-p)_0 p_2 \end{aligned}$$

u. s. f.,

so ist

$$\overset{n}{G}_p = g_0 [p\lambda]^n + g_1 [\overline{p-1}\lambda]^n + g_2 [\overline{p-2}\lambda]^n + \ldots.. \tag{14}$$

Die mit g bezeichneten Grössen stehen hierbei unter der allgemeinen Form

$$\begin{aligned} g_\nu = & \mu_{p-\nu} (n-p+\nu)_\nu (p-\nu)_0 - \mu_{p-\nu+1} (n-p+\nu-1)_{\nu-1} (p-\nu+1)_1 \\ & + \mu_{p-\nu+2} (n-p+\nu-2)_{\nu-2} (p-\nu+2)_2 - \ldots \end{aligned}$$

Drückt man hier $\mu_{p-\nu+1}$, $\mu_{p-\nu+2}$ etc. durch $\mu_{p-\nu}$ aus, indem

$$\mu_{p-\nu+1} = \mu_{p-\nu} \cdot \frac{\mu-p+\nu}{p-\nu+1},$$

$$\mu_{p-\nu+2} = \mu_{p-\nu} \cdot \frac{\mu-p+\nu}{p-\nu+1} \cdot \frac{\mu-p+\nu-1}{p-\nu+2}$$

etc.

ist und setzt für $(p-\nu+1)_1$, $(p-\nu+2)_2$ etc. ihre Werthe, so erhält man sehr leicht:

$$g_\nu = \mu_{p-\nu}\{(n-p+\nu)_\nu(\mu-p+\nu)_0-(n-p+\nu-1)_{\nu-1}(\mu-p+\nu)_1$$
$$+(n-p+\nu-2)_{\nu-2}(\mu-p+\nu)_2-\ldots\},$$

d. i. nach Formel (11) für

$$\alpha=n-p\ ,\ \beta=\mu-p+\nu,$$
$$g_\nu=\mu_{p-\nu}(n-\mu)_\nu.$$

Demgemäss geht die Gleichung (14) über in

$$\overset{n}{G}_p=(n-\mu)_0\,\mu_p\,\overset{n}{[p\lambda]}+(n-\mu)_1\,\mu_{p-1}\,\overset{n}{[\overline{p-1}\lambda]}$$
$$+(n-\mu)_2\,\mu_{p-2}\overset{n}{[\overline{p-2}\lambda]}+\ldots \tag{15}$$

und für die so bestimmten Werthe von $\overset{n}{G}_1$, $\overset{n}{G}_2$ etc. haben wir, wie schon früher

$$D^n(a+x^\lambda)^\mu \tag{16}$$
$$=\frac{(a+x^\lambda)^{\mu-n}}{x^n}\left\{\overset{n}{G}_1\,a^{n-1}x^\lambda+\overset{n}{G}_2\,a^{n-2}x^{2\lambda}+\ldots+\overset{n}{G}_n\,a^0\,x^{n\lambda}\right\}$$

und hierin eine ebenso elegante als brauchbare Formel.

§ 19.

Reduktion des allgemeinen Theoremes in §. 17. für einige spezielle Fälle.

Es giebt einige besondere Werthe von λ, für welche sich die Reihe

$$p_1\lambda_n-p_2(2\lambda)_n+p_3(3\lambda)_n-\ldots \tag{1}$$

die zur Bestimmung des Coeffizienten $\overset{n}{A}_p$ dient, summiren lässt, wodurch sich dann eben so viel spezielle, aber wesentlich einfachere Formeln für $D^nf(x^\lambda)$ ergeben. Es würde aber zu weit führen, hier die Summirung der Reihe (1) in den besonderen Fällen vollständig zu entwickeln, da dieselbe oft auf sehr fern liegenden Eigenschaften der Binomialkoeffizienten ganzer, gebrochener und negativer Exponenten beruht und es wird dagegen die Mittheilung der Resultate genügen, sobald man den Nachweis hinzuliefert, dass dieselben in der That richtig sind. Zu einer Controle über Angaben der Art kann man aber sehr leicht gelangen, wenn man zwei auf einander folgende Differenzialquotienten,

etwa $D^n f(x^\lambda)$ und $D^{n+1}f(x^\lambda)$ betrachtet, wobei es jedoch vortheilhaft ist, die Reihe in No. (24) §. 17. in umgekehrter Ordnung darzustellen. Dann wäre also

$$D^n f(x^\lambda) = \qquad (2)$$

$$\frac{1}{x^n}\{\overset{n}{A}_n x^{n\lambda} f^{(n)}(x^\lambda) + \overset{n}{A}_{n-1}\, x^{(n-1)\lambda} f^{(n-1)}(x^\lambda) + \overset{n}{A}_{n-2}\, x^{(n-2)\lambda} f^{(n-2)}(x^\lambda) + \ldots\}$$

und ganz entsprechend

$$D^{n+1}f(x^\lambda) = \qquad (3)$$

$$\frac{1}{x^{n+1}}\{\overset{n+1}{A}_{n+1}\, x^{(n+1)\lambda} f^{(n+1)}(x^\lambda) + \overset{n+1}{A}_n\, x^{n\lambda} f^{(n)}(x^\lambda) + \overset{n+1}{A}_{n+1} x^{(n-1)\lambda} f^{(n-1)}(x^\lambda) + \ldots\}$$

Andererseits entspringt $D^{n+1}f(x^\lambda)$ aus $D^n f(x^\lambda)$ durch Differenziation des letzteren Ausdrucks und folglich muss auch der Differenzialquotient der Gleichung (2) mit Nr. (3) identisch sein. Jenen Differenzialquotienten findet man aber sehr leicht, wenn man die Division mit x^n gliedweis ausführt und darauf jedes einzelne Glied nach der Formel für die Differenziation der Produkte differenzirt; es ergiebt sich so:

$$\begin{aligned}
D^{n+1}f(x^\lambda) &= \lambda\overset{n}{A}_n x^{n\lambda-n+\lambda-1} f^{(n+1)}(x^\lambda) + (n\lambda-n)\,\overset{n}{A}_n x^{n\lambda-n-1} f^{(n)}(x^\lambda) \\
&+ \lambda\overset{n}{A}_{n-1} x^{(n-1)\lambda-n+\lambda-1} f^{(n)}(x^\lambda) + (\overline{n-1}\lambda-n)\overset{n}{A}_{n-1} x^{(n-1)\lambda-n-1} f^{(n-1)}(x^\lambda) \\
&+ \lambda\overset{n}{A}_{n-2} x^{(n-2)\lambda-n+\lambda-1} f^{(n-1)}(x^\lambda) + (\overline{n-2}\lambda-n)\overset{n}{A}_{n-2} x^{(n-2)\lambda-n-2} f^{(n-2)}(x^\lambda) \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

d. i., wenn man die Glieder mit gleichen Faktoren zusammennimmt,

$$D^{n+1}f(x^\lambda) =$$

$$\frac{1}{x^{n+1}}\{\lambda\overset{n}{A}_n x^{(n+1)\lambda} f^{(n+1)}(x^\lambda) + [(n\lambda-n)\overset{n}{A}_n + \lambda\overset{n}{A}_{n-1}]\, x^{n\lambda} f^{(n)}(x^\lambda)$$

$$+ [(\overline{n-1}\lambda-n)\,\overset{n}{A}_{n-1} + \lambda\overset{n}{A}_{n-2}]\, x^{(n-1)\lambda} f^{(n-1)}(x^\lambda) + \ldots\}$$

mit Nr. (3) verglichen giebt diess

$$\begin{aligned}
\overset{n+1}{A}_{n+1} &= \lambda\overset{n}{A}_n \\
\overset{n+1}{A}_n &= (n\lambda-n)\,\overset{n}{A}_n + \lambda\overset{n}{A}_{n-1} \\
\overset{n+1}{A}_{n-1} &= (\overline{n-1}\,\lambda-n)\,\overset{n}{A}_{n-1} + \lambda\overset{n}{A}_{n-2} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

und überhaupt wenn q eine ganze positive Zahl bezeichnet

$$\overset{n+1}{A}_{n-q} = (\overline{n-q}\lambda - n)\overset{n}{A}_{n-q} + \lambda\overset{n}{A}_{n-q-1} \tag{4}$$

Hierin spricht sich ganz allgemein das Gesetz aus, nach welchem die Coeffizienten der Ordnung $n+1$ aus denen der Ordnung n zusammenzusetzen und diese Relation (sogen. Rekursionsformel) bildet zugleich den Probirstein für einen etwaigen kürzeren Ausdruck des Coeffizienten $\overset{n}{A}_p$ oder $\overset{n}{A}_{n-q}$, den man durch Summirung der Reihe (1) gefunden haben könnte. Die speziellen Fälle nun, in denen es glückte die Reihe in (1) zu summiren, sind $\lambda = -1$, $\lambda = 2$, $\lambda = \frac{1}{2}$; es fand sich nämlich

I. Für $\lambda = -1$

$$\overset{n}{A}_p = (-1)^n \frac{1.2...n}{1.2...p}(n-1)_{p-1} = (-1)^n \frac{1.2...(n-1)}{1.2...(p-1)} n_p$$
$$= (-1)^n (n-1)(n-2)....(p+1)p.n_p,$$

mithin

$$\overset{n}{A}_{n-q} = (-1)^n (n-1)(n-2)...(n-q).n_q, \tag{5}$$

wenn man nämlich berücksichtigt, dass immer $n_{n-q} = n_q$ ist. Die Gleichung (2) nimmt jetzt folgende Gestalt an:

$$(-1)^n D^n f(\frac{1}{x}) =$$

$$\frac{1}{x^{2n}} f^{(n)}(\frac{1}{x}) + \frac{(n-1).n_1}{x^{2n-1}} f^{(n-1)}(\frac{1}{x}) + \frac{(n-1)(n-2).n_2}{x^{2n-2}} f^{(n-2)}(\frac{1}{x}) + ...$$
$$.... + \frac{(n-1)(n-2)...3.2.1.n_{n-1}}{x^{n+1}} f'(\frac{1}{x}) \tag{6}$$

und dass dieselbe richtig ist, kann man nun leicht mit Hülfe der Formel (4) sehen. Es ist jetzt nämlich für $\lambda = -1$ und nach Nr. (5)

$$\overset{n+1}{A}_{n-q} = (-1)^{n+1}\{(2n-q)(n-1)(n-2)...(n-q).n_q + (n-1)(n-2)...$$
$$...(n-q-1).n_{q+1}\}$$
$$= (-1)^{n+1}(n-1)(n-2)...(n-q)\{(2n-q)n_q + (n-q-1)n_{q+1}\}$$

und weil $n_{q+1} = \frac{n-q}{q+1} n_q$ ist:

$$\overset{n+1}{A}_{n-q} = (-1)^{n+1}(n-1)(n-2)...(n-q).n_q\{(2n-q) + (n-q-1)\frac{n-q}{q+1}\},$$

dabei reduzirt sich der Inhalt der Parenthese auf

$$\frac{n^2+n}{q+1} = \frac{n(n+1)}{q+1}$$

und folglich wird

$$\overset{n+1}{A}_{n-q} = (-1)^{n+1} n(n-1)\ldots(n-q) \cdot \frac{n+1}{q+1} n_q$$
$$= (-1)^{n+1} n(n-1)\ldots(n-q) \cdot (n+1)_{q+1}$$

oder $q-1$ an die Stelle von q gesetzt

$$\overset{n+1}{A}_{n-q+1} = (-1)^{n+1} n(n-1)\ldots(n-q+1) \cdot (n+1)_q$$

und dies ist allerdings dasselbe, was man aus no. (5) durch Vertauschung von n gegen $n+1$ erhält; die Gleichung (6) gilt demnach für den $(n+1)$ten Differenzialquotienten, wenn sie für den $n$ten richtig war. Nun giebt sie aber für $n=1$ das richtige Resultat $Df(\frac{1}{x}) = -\frac{1}{x^2} f'(\frac{1}{x})$ und folglich ist sie auch für $n=2$, 3, 4 etc. gültig. Als Beispiel mag die Annahme $f(y) = e^{ay}$ dienen, welche die Gleichung liefert:

$$(-1)^n D^n e^{\frac{a}{x}} = \tag{7}$$
$$\frac{1}{x^n}\left\{\left(\frac{a}{x}\right)^n + (n-1) \cdot n_1 \left(\frac{a}{x}\right)^{n-1} + (n-1)(n-2) \cdot n_2 \left(\frac{a}{x}\right)^{n-2} + \ldots\right\} e^{\frac{a}{x}}.$$

II. Für $\lambda = 2$ fand man

$$\overset{n}{A}_p = \frac{1.2\ldots n}{1.2\ldots p} 2^{2p-n} p_{n-p}$$
$$= n(n-1)(n-2)\ldots(p+1) 2^{2p-n} p_{n-p},$$

folglich

$$\overset{n}{A}_{n-q} = 2^{n-2q} n(n-1)(n-2)\ldots(n-q+1) \cdot (n-q)_q,$$

oder wegen des Werthes von $(n-q)_q$:

$$\overset{n}{A}_{n-q} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-2q+1)}{1.2.3\ldots q} 2^{n-2q}. \tag{8}$$

Die Gleichung (2) geht jetzt in die folgende über:

$$\left.\begin{aligned} D^n f(x^2) = (2x)^n f^{(n)}(x^2) + \frac{n(n-1)}{1} (2x)^{n-2} f^{(n-1)}(x^2) \\ + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2} (2x)^{n-4} f^{(n-2)}(x^2) + \ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

von deren Richtigkeit man sich wieder sehr leicht mit Hülfe der Rekursionsformel (4) überzeugen kann. Es ist nämlich für $\lambda = 2$ und wegen der Gleichung (8) nach no. (4):

$$\overset{n+1}{A}_{n-q} = (n-2q)\frac{n(n-1)\ldots(n-2q+1)}{1.2\ldots q}2^{n-2q} + 2.\frac{n(n-1)\ldots(n-2q+3)}{1.2\ldots(q+1)}2^{n-2q-2}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-2q)}{1.2\ldots q}\;2^{n-2q-1}\;\left\{2 + \frac{n-2q-1}{q+1}\right\}$$

d. i. weil der Inhalt der Klammer $=\dfrac{n+1}{q+1}$ ist

$$\overset{n+1}{A}_{n-q} = \frac{(n+1)n(n-1)\ldots(n-2q)}{1.2\ldots(q+1)}\;2^{n-2q-1}$$

und ebenso wäre der vorhergehende Coeffizient

$$\overset{n+1}{A}_{n-q+1} = \frac{(n+1)n(n-1)\ldots(n-2q+2)}{1.2.3\ldots q}2^{n-2q+1}$$

und diess ist mit dem identisch, was man aus der Gleichung (8) erhält, wenn man darin $n+1$ für n setzt. Die Gleichung (9) gilt also vom $n$ten Differenzialquotienten weiter auf den $(n+1)$ten, folglich allgemein, weil sie für $n=1$ das richtige Resultat $Df(x^2)=2xf'(x^2)$ liefert.

Die Gleichung (9) hat man übrigens häufig anzuwenden Gelegenheit, da man bei vielen analytischen Untersuchungen in den Fall kommt, Funktionen von x^2 differenziren zu müssen. Für $f(y) = e^{ay}$ hat man sehr einfach

$$D^n e^{ax^2} = \qquad (10)$$

$$\left\{a^n(2x)^n + \frac{n(n-1)}{1}a^{n-1}(2x)^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2}a^{n-2}(2x)^{n-4} + \ldots\right\} e^{ax^2}.$$

Ebenso leicht findet man aus der Annahme

$$f(y) = (1+ky)^\mu$$

die folgende Gleichung

$$D^n(1+kx^2)^\mu =$$

$$(1+kx^2)^{\mu-n}\left\{\overset{n}{[\mu]}k^n(2x)^n + \frac{n(n-1)}{1}\overset{n-1}{[\mu]}k^{n-1}(2x)^{n-2}(1+kx^2)^2\right.$$

$$\left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2}\overset{n-2}{[\mu]}k^{n-2}(2x)^{n-4}(1+ka^2)^2 + \ldots\right\}$$

oder auch nach Absonderung des Faktors $\overset{n}{[\mu]}$

$$D^n(1+kx^2)^\mu = \tag{11}$$

$$[\mu]^n(1+kx^2)^{\mu-n}\{k^n(2x)^n + \frac{n(n-1)}{1.(\mu-n+1)}k^{n-1}(2x)^{n-2}(1+kx^2)$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.(\mu-n+1)(\mu-n+2)}k^{n-2}(2x)^{n-4}(1+kx^2)^2+\ldots\}$$

Als specielle Fälle sind noch von Interesse die Annahmen $\mu=-1$ und $\mu=n+\frac{1}{2}$. Die erste giebt

$$D^n(1+kx^2)^{-1} =$$
$$(-1)^n 1.2\ldots n(1+kx^2)^{-(n+1)}\{k^n(2x)^n - \frac{n-1}{1}k^{n-1}(2x)^{n-2}(1+kx^2)$$
$$+\frac{(n-2)(n-3)}{1.2}k^{n-2}(2x)^{n-4}(1+kx^2)^2-\ldots\}$$

d. i. wenn wir zur Abkürzung Binomialkoeffizienten einführen

$$(-1)^n D^n\left(\frac{1}{1+kx^2}\right) = \tag{12}$$
$$\frac{1.2\ldots.n}{(1+kx^2)^{n+1}}\{n_0 k^n(2x)^n-(n-1)_1 k^{n-1}(2x)^{n-2}(1+kx^2)$$
$$+(n-2)_2 k^{n-2}(2x)^{n-4}(1+kx^2)^2-\ldots\}$$

Für $\mu=n+\frac{1}{2}$ nimmt die allgemeine Form der in der Reihe (11) vorkommenden Coeffizienten nämlich

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-2q+1)}{1.2\ldots q.(\mu-n+1)(\mu-n+2)\ldots(\mu-n+q)}$$

die folgende Gestalt an:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-2q+1)}{1.2.3\ldots q.\frac{3}{2}.\frac{5}{2}.\frac{7}{2}\ldots\frac{2q+1}{2}}$$

oder wenn man Zähler und Nenner mit 2^{2q} multiplicirt

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-2q+1)}{2.4.6\ldots(2q).3.5.7\ldots(2q+1)}2^{2q}.$$

Nun ist aber der Binomialkoeffizient

$$(n+1)_{2q+1} = \frac{(n+1)n(n-1)\ldots(n-2q+1)}{1.2.3.4\ldots(2q+1)},$$

folglich unser obiger Ausdruck auch gleich

$$\frac{2^{2q}}{n+1}(n+1)_{2q+1}.$$

Hiernach erhalten wir aus der Gleichung (11) die folgende:

$$D^n(1+kx^2)^{n+\frac{1}{2}} =$$
$$\frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{n+1}(1+kx^2)^{\frac{1}{2}}\{(n+1)_1 k^n x^n + (n+1)_3 k^{n-1} x^{n-2}(1+kx^2)$$
$$+ (n+1)_5 k^{n-2} x^{n-4}(1+kx^2)^2 + \ldots\}$$

Setzt man noch $k = -1$ und $n-1$ für n, so lässt sich die auf der rechten Seite der entspringenden Gleichung:

$$D^{n-1}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} =$$
$$\frac{(-1)^n 1.3.5\ldots(2n-1)}{n}\{n_1 x^{n-1}\sqrt{1-x^2} - n_3 x^{n-3}\sqrt{1-x^2}^3$$
$$+ n_5 x^{n-5}\sqrt{1-x^2}^5 - \ldots\}$$

stehende Reihe leicht summiren. Wir haben nämlich in der Einleitung den goniometrischen Satz kennen gelernt:

$$\sin nu = n_1 \cos^{n-1} u \sin u - n_3 \cos^{n-3} u \sin^3 u$$
$$+ n_5 \cos^{n-5} u \sin^5 u - \ldots,$$

welcher sich für $\cos u = x$, also $\sin u = \sqrt{1-x^2}$ und $u = \text{Arccos}\, x$ auch in folgender Form aussprechen lässt

$$\sin(n\,\text{Arccos}\, x) = n_1 x^{n-1}\sqrt{1-x^2} - n_3 x^{n-3}\sqrt{1-x^2}^3$$
$$+ n_5 x^{n-5}\sqrt{1=x^2}^5 - \ldots.$$

und so die Summe der oben vorkommenden Reihe liefert. Es ergiebt sich demnach

$$D^{n-1}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} = \frac{(-1)^n 1.3.5\ldots(2n-1)}{n}\sin(n\,\text{Arccos}\, x) \quad (13)$$

ein zuerst von Jacobi aufgestelltes sehr elegantes Theorem.

III. Für $\lambda = \frac{1}{2}$ ergab sich

$$\overset{n}{A}_p = (-1)^{n-p}\frac{1.2\ldots n}{1.2\ldots p}\cdot\frac{p(2n-p-1)_{n-p}}{n2^{2n-p}}$$

oder

$$\overset{n}{A}_p = (-1)^{n-p}(n-1)(n-2)\ldots p\cdot\frac{(2n-p-1)_{n-p}}{2^{2n-p}}$$

und folglich

$$\overset{n}{A}_{n-q} = (-1)^q(n-1)(n-2)\ldots(n-q)\frac{n+q-1)_q}{2^{n+q}},$$

und da der Binomialkoeffizient

$$(n+q-1)_q = \frac{(n+q-1)(n+q-2)\dots n}{1.2\dots q}$$

ist,

$$\overset{n}{A}_{n-q} = \frac{(-1)^q}{2^n} \cdot \frac{(n+q-1)(n+q-2)\dots n(n-1)\dots(n-q)}{2.4.6\dots(2q)} \qquad (14)$$

und somit bekommen wir aus der Formel (2) die folgende

$$D^n f(\sqrt{x}) = \frac{1}{2^n} \Big\{ \frac{f^{(n)}(\sqrt{x})}{(\sqrt{x})^n} - \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{f^{(n-1)}(\sqrt{x})}{(\sqrt{x})^{n+1}}$$

$$+ \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2.4} \cdot \frac{f^{(n-2)}(\sqrt{x})}{(\sqrt{x})^{n+2}} - \dots \Big\} \qquad (15)$$

Für die Richtigkeit dieses Theoremes wird uns nun wieder die in (4) aufgestellte Relation als Controle dienen. Es ergiebt sich nämlich aus derselben nach no. (14)

$$\overset{n+1}{A}_{n-q} = -\frac{n+q}{2} \cdot \frac{(-1)^q}{2^n} \cdot \frac{(n+q-1)(n+q-2)\dots(n-q)}{2.4.6\dots(2q)}$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{(-1)^{q+1}}{2^n} \cdot \frac{(n+q)(n+q-1)\dots(n-q-1)}{2.4.6\dots(2q+2)}$$

$$= \frac{(-1)^{q+1}}{2^{n+1}} \cdot \frac{(n+q)(n+q-1)\dots(n-q)}{2.4.6\dots(2q)} \Big\{ 1 + \frac{n-q-1}{2q+2} \Big\}$$

$$= \frac{(-1)^{q+1}}{2^{n+1}} \cdot \frac{(n+q+1)(n+q)(n+q-1)\dots(n-q)}{2.4.6\dots(2q+2)}.$$

Ebenso wäre $q-1$ für q gesetzt

$$\overset{n+1}{A}_{n-q+1} = \frac{(-1)^q}{2^{n+1}} \cdot \frac{(n+q)(n+q-1)\dots(n-q+1)}{2.4.6\dots(2q)}.$$

Das Nämliche würde man aber auch aus no. (14) erhalten, wenn man daselbst $n+1$ an die Stelle von n setzte. Die Gleichung (15) gilt demnach von n auf $n+1$ und da sie für $n=1$ das richtige Resultat $Df(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}} f'(\sqrt{x})$ liefert, so folgt daraus ihre Allgemeingültigkeit. Für $f(y) = (1+ky)^\mu$ erhält man z. B. aus ihr nach einiger Reduktion

$$D^n(1+k\sqrt{x})^\mu = \frac{\overset{n}{[\mu]} k^n (1+\sqrt{x})^{\mu-n}}{(2\sqrt{x})^n} \Big\{ 1 - \frac{n(n-1)}{2.(\mu-n+1)} \cdot \frac{1+k\sqrt{x}}{k\sqrt{x}}$$

$$+ \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2.4.(\mu-n+1)(\mu-n+2)} \Big(\frac{1+k\sqrt{x}}{k\sqrt{x}}\Big)^2 - \dots \Big\}$$

und noch spezieller für $\mu = 2n-1$

$$D^n(1+k\sqrt{x})^{2n-1}=\frac{n(n+1)..(2n-1)k}{2\sqrt{x}}\left(\frac{k(1+k\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}\right)^{n-1}\left\{1-\frac{n-1}{1}\cdot\frac{1+k\sqrt{x}}{2k\sqrt{x}}+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\left(\frac{1+k\sqrt{x}}{2k\sqrt{x}}\right)^2-\ldots\right\}$$

wobei die Summe der eingeklammerten Reihe

$$=\left(1-\frac{1+k\sqrt{x}}{2k\sqrt{x}}\right)^{n-1}=\left(\frac{k\sqrt{x}-1}{2k\sqrt{x}}\right)^{n-1}$$

ist. So findet man nun sehr leicht

$$D^n(1+k\sqrt{x})^{2n-1}=\frac{n(n+1)\ldots(2n-1)}{2^{2n-1}}\left(k^2-\frac{1}{x}\right)^{n-1}\frac{k}{\sqrt{x}}$$

und wenn man berücksichtigt, dass

$$\frac{n(n+1)\ldots(2n-1)}{2^{n-1}}=\frac{1.2.3\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots(n-1).2^{n-1}}$$
$$=\frac{1.2.3\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n-2)}=1.3.5\ldots(2n-1)$$

ist, so wird endlich

$$D^n(1+k\sqrt{x})^{2n-1}=\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n}\frac{k}{\sqrt{x}}\left(k^2-\frac{1}{x}\right)^{n-1}.$$

Die Annahme $f(y) = e^{ay}$ bildet ein zweites Beispiel; man findet ohne Schwierigkeit

$$D^n e^{a\sqrt{x}}=$$
$$\left(\frac{a}{2\sqrt{x}}\right)^n\left\{1-\frac{n(n-1)}{2}\frac{1}{a\sqrt{x}}+\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2\,.\,4}\left(\frac{1}{a\sqrt{x}}\right)^2-\ldots\right\}e^{a\sqrt{x}}.$$

§ 20.

Independente Bestimmung von $D^nf(e^x)$.

Durch ein Verfahren, welches dem in §. 17 angewendeten völlig analog ist, lassen sich auch leicht die Gesetze entdecken, nach welchen sich die höheren Differenzialquotienten von $f(e^x)$ bilden. Zuvörderst nämlich findet man leicht durch successive Differenziation:

$$Df(e^x)=e^xf'(e^x)$$
$$D^2f(e^x)=e^xf'(e^x)+e^{2x}f''(e^x)$$
$$D^3f(e^x)=e^xf'(e^x)+3e^{2x}f''(e^x)+e^{3x}f'''(e^x)$$
$$D^4f(e^x)=e^xf'(e^x)+7e^{2x}f''(e^x)+9e^{3x}f'''(e^x)+e^{4x}f^{IV}(e^x) \text{ u. s. f.}$$

Die allgemeine Form, unter welcher alle diese Gleichungen stehen, ist

$$D^n f(e^x) = \left.\begin{array}{c} \\ \overset{n}{A}_1 e^x f'(e^x) + \overset{n}{A}_2 e^{2x} f''(e^x) + \overset{n}{A}_3 e^{3x} f'''(e^x) + \ldots + \overset{n}{A}_n e^{nx} f^{(n)}(e^x), \end{array}\right\} \quad (1)$$

in welcher wieder

$$\overset{n}{A}_1, \overset{n}{A}_2, \overset{n}{A}_3, \ldots . \overset{n}{A}_n$$

gewisse Coefficienten bedeuten, deren Bildungsgesetz wir zu erforschen suchen müssen.

Aus dem Verlaufe der oben entwickelten Gleichungen geht nun hervor, dass diese Coefficienten wohl vom Ordnungsexponenten n und ihrem Index, aber nicht von der Natur der Funktion f abhängen, dass es folglich zur allgemeinen Bestimmung ihrer Werthe hinreicht, dieselben für irgend eine spezielle Funktion f auszumitteln. Hierzu dient uns die Substitution

$$f(y) = (1+y)^n,$$

aus welcher für ein ganzes positives p folgt

$$f^{(p)}(y) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)(1+y)^{n-p}$$

folglich

$$f^{(p)}(e^x) = \overset{p}{[n]}(1+e^x)^{n-p}$$

und also nach dem Theoreme in (1)

$$D^n(1+e^x)^n = \quad (2)$$

$$\overset{n}{A}_1 \overset{1}{[n]} e^x (1+e^x)^{n-1} + \overset{n}{A}_2 \overset{2}{[n]} e^{2x}(1+e^x)^{n-2} + \overset{n}{A}_3 \overset{3}{[n]} e^{3x}(1+e^x)^{n-3} + \ldots$$
$$\ldots + \overset{n}{A}_{n-1} \overset{n-1}{[n]} e^{(n-1)x}(1+e^x) + \overset{n}{A}_n \overset{n}{[n]} e^{nx}.$$

Andererseits hat man

$$(1+e^x)^n = 1 + n_1 e^x + n_2 e^{2x} + \ldots + n_n e^{nx}$$

und nach der Formel

$$D^n e^{kx} = k^n e^{kx}$$

auch

$$D^n(1+e^x)^n =$$
$$1^n n_1 e^x + 2^n n_2 e^{2x} + 3^n n_3 e^{3x} + \ldots + n^n n_n e^{nx}.$$

Vergleichen wir diess mit no. (2) und setzen zur Abkürzung $e^x = y$, so ist

$$1^n n_1 y + 2^n n_2 y^2 + 3^n n_3 y^3 + \ldots + n^n n_n y^n$$
$$= \overset{n}{A}_1 \overset{1}{[n]} y(1+y)^{n-1} + \overset{n}{A}_2 \overset{2}{[n]} y^2(1+y)^{n-2} + \overset{n}{A}_3 \overset{3}{[n]} y^3(1+y)^{n-3} + \ldots$$
$$\ldots + \overset{n}{A}_{n-1} \overset{n-1}{[n]} y^{n-1}(1+y) + \overset{n}{A}_n \overset{n}{[n]} y^n$$

und durch Umwandlung der Potenzen $(1+y)^{n-1}$, $(1+y)^{n-2}$ etc. in Reihen

$$1^n n_1 y + 2^n n_2 y^2 + 3^n n_3 y^3 + \ldots + n^n n_n y^n$$
$$= \overset{n}{A}_1 \overset{1}{[n]} \{ y + (n-1)_1 y^2 + (n-1)_2 y^3 + \ldots + (n-1)_{n-1} y^n \}$$
$$+ \overset{n}{A}_2 \overset{2}{[n]} \{ y^2 + (n-2)_1 y^3 + (n-2)_2 y^4 + \ldots + (n-2)_{n-2} y^n \}$$
$$+ \overset{n}{A}_3 \overset{3}{[n]} \{ y^3 + (n-3)_1 y^4 + (n-3)_2 y^5 + \ldots + (n-3)_{n-3} y^n \}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \overset{n}{A}_n \overset{n}{[n]} y^n.$$

Damit diese Gleichung für alle möglichen Werthe von y bestehe, ist es nothwendig, dass die Coeffizienten gleicher Potenzen von y einander gleich seien; aus dieser Bemerkung fliessen folgende Gleichungen:

$$1^n n_1 = \overset{n}{A}_1 \overset{1}{[n]}$$
$$2^n n_2 = \overset{n}{A}_1 \overset{1}{[n]} (n-1)_1 + \overset{n}{A}_2 \overset{2}{[n]}$$
$$3^n n_3 = \overset{n}{A}_1 \overset{1}{[n]} (n-1)_2 + \overset{n}{A}_2 \overset{2}{[n]} (n-2)_1 + \overset{n}{A}_3 \overset{3}{[n]}$$
$$4^n n_4 = \overset{n}{A}_1 \overset{1}{[n]} (n-1)_3 + \overset{n}{A}_2 \overset{2}{[n]} (n-2)_2 + \overset{n}{A}_3 \overset{3}{[n]} (n-3)_1 + \overset{n}{A}_4 \overset{4}{[n]}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$n^n n_n = \overset{n}{A}_1 \overset{1}{[n]} (n-1)_{n-1} + \overset{n}{A}_2 \overset{2}{[n]} (n-2)_{n-2} + \overset{n}{A}_3 \overset{3}{[n]} (n-3)_{n-3} + \ldots + \overset{n}{A}_n \overset{n}{[n]}$$

Setzt man für $\overset{1}{[n]}$, $\overset{2}{[n]}$, $\overset{3}{[n]}$ etc. ihre Werthe n, $n(n-1)$, $n(n-1)(n-2)$ etc. und ebenso die Werthe der Binomialkoeffizienten hin, so erkennt man, dass die erste Gleichung sich durch n aufdividiren lässt, die zweite durch $n(n-1)$, die dritte durch $n(n-1)(n-2)$ etc., die letzte durch $n(n-1)\ldots 2.1$. Nach Ausführung dieser Divisionen nehmen die obigen Gleichungen folgende Form an:

$$\frac{1^n}{1} = \overset{n}{A}_1$$
$$\frac{2^n}{1.2} = \frac{1}{1}\overset{n}{A}_1 + \overset{n}{A}_2$$
$$\frac{3^n}{1.2.3} = \frac{1}{1.2}\overset{n}{A}_1 + \frac{1}{1}\overset{n}{A}_2 + \overset{n}{A}_3$$
$$\frac{4^n}{1.2.3.4} = \frac{1}{1.2.3}\overset{n}{A}_1 + \frac{1}{1.2}\overset{n}{A}_2 + \frac{1}{1}\overset{n}{A}_3 + \overset{n}{A}_4$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{n^n}{1.2\ldots n} = \frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\overset{n}{A}_1 + \frac{1}{1.2\ldots(n-2)}\overset{n}{A}_2 + \ldots + \frac{1}{1}\overset{n}{A}_{n-1} + \overset{n}{A}_n.$$

Vergleicht man diese Relationen mit den Gleichungen unter no. (6) in § 17, so erkennt man sogleich, dass man es nur mit einem speziellen Falle derselben zu thun hat, in welchem für ein ganzes positives p,

$$k_p = p^n \,,\; x_p = \overset{n}{A}_p$$

ist. Da nun aus den Gleichungen (6) in § 17 für x_p der unter no. (8) oder (9) verzeichnete Werth folgt, so ist in unserem Falle

$$\overset{n}{A}_p = \frac{(-1)^{p+1}}{1.2\ldots p}\{1^n p_1 - 2^n p_2 + 3^n p_3 - \ldots \pm p^n p_p\} \quad (3)$$

oder

$$\overset{n}{A}_p = \frac{1}{1.2\ldots p}\{p^n - (p-1)^n p_1 + (p-2)^n p_2 - (p-3)^n p_3 + \ldots\} \quad (4)$$

und für die hierdurch bestimmten Werthe der Coeffizienten gilt nun die Gleichung

$$D^n f(e^x) =$$

$$\overset{n}{A}_1 e^x f'(e^x) + \overset{n}{A}_2 e^{2x} f''(e^x) + \overset{n}{A}_3 e^{3x} f'''(e^x) + \ldots + \overset{n}{A}_n e^{nx} f^{(n)}(e^x).$$

Für die Anwendung derselben auf spezielle Fälle ist es bequemer, dieses Theorem in etwas anderer Form auszusprechen. Setzt man nämlich

$$\overset{n}{K}_p = p^n - (p-1)^n p_1 + (p-2)^n p_2 - (p-3)^n p_3 + \ldots \quad (6)$$

so ist auch

$$\left.\begin{array}{l} D^n f(e^x) = \\ \frac{1}{1}\overset{n}{K}_1 e^x f'(e^x) + \frac{1}{1.2}\overset{n}{K}_2 e^{2x} f''(e^x) + \frac{1}{1.2.3}\overset{n}{K}_3 e^{3x} f'''(e^x) + \ldots \\ \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots n}\overset{n}{K}_n e^{nx} f^{(n)}(e^x) \end{array}\right\} \quad (7)$$

Passende Beispiele zu diesem Theoreme bilden folgende Substitutionen:

1. $f(y) = (a+y)^\mu$, wofür man erhält

$$\frac{1}{1.2.3\ldots p}\overset{n}{K}_p e^{px} f^{(p)}(e^x) = \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-p+1)}{1.2.3\ldots p}\overset{n}{K}_p e^{px}(a+e^x)^{\mu-p}$$

$$= \mu_p \overset{n}{K}_p \left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^p (a+e^x)^\mu$$

und folglich

$$D^n (a+e^x)^\mu = \quad (8)$$

$$(a+e^x)^\mu \left\{\mu_1 \overset{n}{K}_1\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right) + \mu_2 \overset{n}{K}_2\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^2 + \ldots + \mu_n \overset{n}{K}_n\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^n\right\}$$

also z. B. für $\mu = -\frac{1}{2}$

$$D^n\left(\frac{1}{\sqrt{a+e^x}}\right)= \tag{9}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{a+e^x}}\Big\{\tfrac{1}{2}\overset{n}{K}_1\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)-\frac{1.3}{2.4}\overset{n}{K}_2\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^2+\frac{1.3.5}{2.4.6}\overset{n}{K}_3\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^3-\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}\overset{n}{K}_n\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^n\Big\}$$

und für $\mu=-1$,

$$D^n\left(\frac{1}{a+e^x}\right)= \tag{10}$$

$$-\frac{1}{a+e^x}\Big\{\overset{n}{K}_1\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)-\overset{n}{K}_2\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^2+\ldots+(-1)^{n-1}\overset{n}{K}_n\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^n\Big\}.$$

II. Für $f(y)=l(a+y)$ findet man

$$\frac{1}{1.2.3\ldots p}\overset{n}{K}_p e^{px}f^{(p)}(e^x)=\frac{(-1)^{p-1}1.2.3\ldots(p-1)}{1.2.3\ldots p}\overset{n}{K}_p e^{px}\frac{1}{(a+e^x)^p}$$

$$=(-1)^{p-1}\frac{1}{p}\overset{n}{K}_p\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^p$$

folglich nach no. (7)

$$\left.\begin{aligned}D^n l(a+e^x)=\frac{1}{1}\overset{n}{K}_1\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)-\frac{1}{2}\overset{n}{K}_2\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^2+\frac{1}{3}\overset{n}{K}_3\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^3-\ldots\\ \ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\overset{n}{K}_n\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^n\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

III. Die in (8) und (11) entwickelten Formeln können selbst wieder zur Entdeckung von Eigenschaften der Coeffizienten $\overset{n}{K}_1$, $\overset{n}{K}_2$ etc. benutzt werden, wenn man die willkührliche Constante $a=0$ setzt. Man hat dann auf der linken Seite von (8)

$$D^n e^{\mu x}=\mu^n e^{\mu x}$$

und nach beiderseitiger Hebung mit $e^{\mu x}$,

$$\mu^n=\mu_1\overset{n}{K}_1+\mu_2\overset{n}{K}_2+\mu_3\overset{n}{K}_3+\ldots+\mu_n\overset{n}{K}_n \tag{12}$$

was eine sehr bemerkenswerthe für jedes μ geltende Relation ist.

Substituirt man für μ_1, μ_2 ..... μ_n ihre Werthe

$$\frac{\mu}{1},\ \frac{\mu(\mu-1)}{1.2},\ \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3},\ldots$$

führt die angedeuteten Multiplikationen aus und ordnet in (12) Alles nach Potenzen von μ, so müssen die Coeffizienten gleicher Potenzen, von μ einander gleich sein. Da aber links nur μ^n steht, so folgt,

dass die Coeffizienten aller niedrigeren Potenzen von μ der Null gleich sind, der Coeffizient von μ dagegen der Einheit gleich ist. Nach dieser Bemerkung ist z. B. der Coeffizient von μ^1,

$$\frac{1}{1}\overset{n}{K}_1 - \frac{1}{2}\overset{n}{K}_2 + \frac{1}{3}\overset{n}{K}_3 - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\overset{n}{K}_n = 0\,,\ (n > 1) \quad (13)$$

und der Coeffizient von μ^n,

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n}\overset{n}{K}_n = 1$$

oder vermöge des Werthes von $\overset{n}{K}_n$,

$$1.2.3\ldots n = n^n - (n-1)^n n_1 + (n-2)^n n_2 - (n-3)^n n_3 + \ldots \quad (14)$$

ein an sich sehr bemerkenswerther Satz.

Nimmt man auch in der Formel (11) $a = 0$, so kommt man auf das schon unter no. (13) gefundene Resultat.

§ 21.

Besondere Transformationen für $D^n(a+e^x)^{-1}$ und $D^n(a+e^x)^\mu$.

Man hat sich vielfach mit den höheren Differenzialquotienten der Funktion

$$\frac{1}{a+e^x}$$

beschäftigt, weil man aus ihnen die höheren Differenzialquotienten von $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$ und $\operatorname{cosec} x$ ableiten kann. Die Resultate, welche man bei diesen Untersuchungen bekommen hat, sind zum Theil formell sehr von einander verschieden, lassen sich jedoch sammt und sonders aus den im vorigen Paragraphen entwickelten Sätzen ableiten, welche man daher als ihre gemeinschaftliche Quelle ansehen kann. Wir wollen einige Transformationen dieser Art mittheilen, die den Zusammenhang der verschiedenen Formen für eine und die nämliche Sache aufdecken.

I. Will man in der Formel (10) den gemeinschaftlichen Faktor

$$\frac{1}{a+e^x}$$

wegschaffen, um blos Potenzen von

$$\frac{e^x}{a+e^x},$$

also eine Reihe von der Form

$$\overset{n}{J}_1\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)-\overset{n}{J}_2\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^2+\overset{n}{J}_3\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^3-\ldots$$

zu sehen, so beachte man, dass

$$\frac{1}{a+e^x}=\frac{1}{a}\left(1-\frac{e^x}{a+e^x}\right)$$

ist, setze zur Abkürzung

$$\frac{e^x}{a+e^x}=u \tag{1}$$

und multiplicire beiderseits mit $-a$, so wird

$$-aD^n\left(\frac{1}{a+e^x}\right)$$

$$=(1-u)\{\overset{n}{K}_1u-\overset{n}{K}_2u^2+\overset{n}{K}_3u^3-\ldots.+(-1)^{n-1}\overset{n}{K}_nu^n\}$$

$$=\overset{n}{K}_1u-(\overset{n}{K}_2+\overset{n}{K}_1)u^2+(\overset{n}{K}_3+\overset{n}{K}_2)u^3-(\overset{n}{K}_4+\overset{n}{K}_3)u^4+\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{n-1}(\overset{n}{K}_n+\overset{n}{K}_{n-1})u^n+(-1)^n\overset{n}{K}_nu^{n+1}.$$

Setzen wir kürzer

$$-aD^n\left(\frac{1}{a+e^x}\right)=\overset{n}{J}_1u-\overset{n}{J}_2u^2+\overset{n}{J}_3u^3-\ldots.+(-1)^{n+1}\overset{n}{J}_{n+1}u^{n+1}, \tag{2}$$

so ist durch Vergleichung mit dem Vorigen

$$\overset{n}{J}_1=\overset{n}{K}_1,\ \overset{n}{J}_2=\overset{n}{K}_2+\overset{n}{K}_1,\ \overset{n}{J}_3=\overset{n}{K}_3+\overset{n}{K}_2,\ldots.$$

$$\ldots.\overset{n}{J}_n=\overset{n}{K}_n+\overset{n}{K}_{n-1},\ \overset{n}{J}_{n+1}-\overset{n}{K}_n$$

oder überhaupt für ein ganzes positives p

$$\overset{n}{J}_p=\overset{n}{K}_p+\overset{n}{K}_{p-1},$$

wobei man für $p=1$, $\overset{n}{K}_0=0$ und für $p=n$, $\overset{n}{K}_{n+1}=0$ genommen werden muss. Aus den Werthen von $\overset{n}{K}_p$ und $\overset{n}{K}_{p-1}$ folgt leicht

$$\overset{n}{J}_p=p^n-(p-1)^n[p_1-1]+(p-2)^n[p_2-p_1]-(p-3)^n[p_3-p_2]+\ldots$$

oder nach dem Satze von den Binomialkoeffizienten

$$p_r-(p-1)_{r-1}=(p-1)_r,$$

welchen man hier der Reihe nach für $r=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots$ anzuwenden Gelegenheit hat:

$$\overset{n}{J}_p = p^n - (p-1)^n (p-1)_1 + (p-2)^n (p-1)_2 - (p-3)^n (p-1)_3 + \ldots \qquad (3)$$

Für die hierdurch bestimmten Werthe der Coeffizienten $\overset{n}{J}_1, \overset{n}{J}_2, \ldots$
$\ldots \overset{n}{J}_{n+1}$ ist nun nach (2) und (1)

$$-aD^n\left(\frac{1}{a+e^x}\right) = \qquad (4)$$
$$\overset{n}{J}_1\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right) - \overset{n}{J}_2\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^2 + \ldots + (-1)^n \overset{n}{J}_{n+1}\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^{n+1}.$$

Bemerkt man, dass

$$\frac{1}{a+e^x} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a} \cdot \frac{e^x}{a+e^x}$$

ist, so hat man auch

$$D^n\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right) = \qquad (5)$$
$$\overset{n}{J}_1\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right) - \overset{n}{J}_2\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^2 + \ldots + (-1)^n \overset{n}{J}_{n+1}\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^{n+1},$$

ein durch seine Eleganz bemerkenswerthes Resultat.

II. Man kann zu der so eben entwickelten Gleichung auch noch auf anderem Wege gelangen. Man setze nämlich in der Gleichung (11) $n+1$ an die Stelle von n und bemerke für die linke Seite, dass

$$D^{n+1} l(a+e^x) = D^n [Dl(a+e^x)] = D^n \left[\frac{e^x}{a+e^x}\right]$$

ist; man erhält dann:

$$D^n\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right) = \qquad (6)$$
$$\frac{1}{1}\overset{n+1}{K}_1\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right) - \frac{1}{2}\overset{n+1}{K}_2\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^2 + \ldots + \frac{(-1)^n}{n+1}\overset{n+1}{K}_{n+1}\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^{n+1}.$$

Aus der Vergleichung von (5) und (6) folgt jetzt für jedes positive ganze p

$$\overset{n}{J}_p = \frac{1}{p}\overset{n+1}{K}_p, \qquad (7)$$

was vermöge der Werthe von $\overset{n}{J}_p$ und $\overset{n+1}{K}_p$ ein rein algebraischer Satz ist. Da sich derselbe auch direkt leicht beweisen lässt, so könnte man hiermit jede der Gleichungen (5) und (6) aus der jedesmaligen anderen ableiten.

Nimmt man in no. (5) x negativ, $a = -1$ und bemerkt, dass

$$\frac{e^{-x}}{-1+e^{-x}}=\frac{1}{-e^x+1}=-\frac{1}{e^x-1}$$

ist, so ergiebt sich leicht

$$(-1)^n D^n\left(\frac{1}{e^x-1}\right) \tag{8}$$
$$=\overset{n}{J}_1\left(\frac{1}{e^x-1}\right)+\overset{n}{J}_2\left(\frac{1}{e^x-1}\right)^2+\ldots.+\overset{n}{J}_{n+1}\left(\frac{1}{e^x-1}\right)^{n+1},$$

ein zuerst von Malmstén gefundenes Resultat *).

III. Eine andere Transformation, welche man mit der allgemeinen Gleichung

$$D^n(a+e^x)^\mu$$
$$=(a+e^x)^\mu\left\{\mu_1\overset{n}{K}_1\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)+\mu_2\overset{n}{K}_2\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^2+\ldots+\mu_n\overset{n}{K}_n\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^n\right\}$$

vornehmen kann, hat zum Zweck, alle Grössen in der Paranthese rechts auf gleichen Nenner zu bringen. Der nächste Schritt hierzu ist, die Gleichung selbst in folgender Form darzustellen:

$$D^n(a+e^x)^\mu$$
$$=(a+e^x)^{\mu-n}\{\mu_1\overset{n}{K}_1e^x(a+e^x)^{n-1}+\mu_2\overset{n}{K}_2e^{2x}(a+e^x)^{n-2}+\ldots+\mu_n\overset{n}{K}_ne^{nx}\},$$

wo nun alle Potenzen in der Parenthese nach deren Binomialtheoreme zu entwickeln wären. Wir können uns aber diese Arbeit ersparen, wenn wir uns erinnern, dass wir eine ganz ähnliche Rechnung schon einmal in § 18. V. gemacht haben, als wir die Gleichung (12) daselbst transformirten. Bemerken wir nun, dass Das, was in no. (9) innerhalb der Parenthese steht, mit Dem conform ist, was dort in der Parenthese enthalten war, und dass Jenes aus Diesem abgeleitet werden kann, wenn man statt

$$x^\lambda\,,\ \overset{n}{E}_1\,,\ \overset{n}{E}_2\,,\ \overset{n}{E}_3\,,\ \ldots.$$

setzt

---

*) Archiv der Mathematik von Prof. Grunert Theil VI. S. 45. Um die Bezeichnung in Einklang zu bringen, muss man statt

$$n\ ,\ p\ ,\ \overset{n}{J}_p$$

schreiben:

$$i\ ,\ k\ ,\ \overset{(i,\,k)}{a},$$

wobei aber das letzte Symbol etwas unbequem zu sein scheint.

$$e^x \ , \ \overset{n}{K}_1 \ , \ \overset{n}{K}_2 \ , \ \overset{n}{K}_3 \ , \ldots .$$

so ergiebt sich auf der Stelle, dass der Inhalt der Parenthese in Formel (9) sich folgendermassen darstellen lässt:

$$\overset{n}{L}_1 \, a^{n-1} e^x + \overset{n}{L}_2 \, a^{n-2} e^{2x} + \overset{n}{L}_3 \, a^{n-3} e^{3x} + \ldots .$$

worin $\overset{n}{L}_1$, $\overset{n}{L}_2$ etc. Coeffizienten bedeuten, die eben so aus den mit K bezeichneten Grössen gebildet sind, wie die Coeffizienten $\overset{n}{G}_1$, $\overset{n}{G}_2$ etc. in der früheren Untersuchung aus den mit E bezeichneten Ausdrücken. Wir haben also

$$D^n (a + e^x)^\mu$$

$$= (a + e^x)^{\mu - n} \{ \overset{n}{L}_1 a^{n-1} e^x + \overset{n}{L}_2 a^{n-2} e^{2x} + \ldots + \overset{n}{L}_n a^0 e^{nx} \}.$$

Nach der so eben gemachten Bemerkung hinsichtlich der Coeffizienten L ist nun klar, dass irgend eine dieser Grössen etwa $\overset{n}{L}_p$ sich von dem früher entwickelten $\overset{n}{G}_p$ nur um so viel unterscheiden kann, als die Bestandtheile von $\overset{n}{L}_p$, nämlich

$$\overset{n}{K}_1 \ , \ \overset{n}{K}_2 \ , \ \overset{n}{K}_3 \ , \ldots .$$

von denen des Coeffizienten $\overset{n}{G}_p$ d. h.

$$\overset{n}{E}_1 \ , \ \overset{n}{E}_2 \ , \ \overset{n}{E}_3 \ , \ldots$$

abweichen. Nun ist aber

$$\overset{n}{E}_p = p_0 \overset{n}{[p\lambda]} - p_1 \overset{n}{[\overline{p-1}\,\lambda]} + p_2 \overset{n}{[\overline{p-2}\lambda]} - \ldots$$

$$\overset{n}{K}_p = p_0 p^n - p_1 (p-1)^n + p_2 (p-2)^n - \ldots$$

und also unterscheidet sich $\overset{n}{K}_p$ von $\overset{n}{E}_p$ nur darin, dass an der Stelle von

$$\overset{n}{[p\lambda]} \ , \ \overset{n}{[\overline{p-1}\lambda]} \ , \ \overset{n}{[\overline{p-2}\lambda]} \ , \ldots$$

die Potenzen

$$p^n \ , \ (p-1)^n \ , \ (p-2)^n \ , \ldots$$

stehen. Daraus folgt, dass man auch $\overset{n}{L}_p$ aus $\overset{n}{G}_p$ ableiten kann, wenn man in dem Werthe der letzteren Grösse die nämlichen Vertauschungen vornimmt. Demnach ist vermöge der Formel (15) in § 18

$$\overset{n}{L}_p = (n-\mu)_0\,\mu_p\,p^n + (n-\mu)_1\,\mu_{p-1}\,(p-1)^n + (n-\mu)_2\,\mu_{p-2}\,(p-2)^n + \ldots \quad (10)$$

und für die so bestimmten Werthe von $\overset{n}{L}_1$, $\overset{n}{L}_2$ etc. haben wir jetzt

$$\left.\begin{array}{l} D^n (a+e^x)^\mu \\ = (a+e^x)^{\mu-n}\{\overset{n}{L}_1\,a^{n-1}e^x + \overset{n}{L}_2\,a^{n-2}e^{2x} + \ldots + \overset{n}{L}_n\,a^0 e^{nx}\}. \end{array}\right\} \quad (11)$$

Als spezieller Fall ist hier die Annahme $\mu = -1$ bemerkenswerth, weil man hier auf ein schon bekanntes, zuerst von Euler entwickeltes Resultat stösst. Es wird dann

$$L_p = (-1)^p\{(n+1)_0 p^n - (n+1)_1 (p-1)^n + (n+1)_2 (p-2)^n - \ldots\}$$

und

$$D^n (a+e^x)^{-1}$$
$$= (a+e^x)^{-(n+1)}\{\overset{n}{L}_1\,a^{n-1}e^x + \overset{n}{L}_2\,a^{n-2}e^{2x} + \ldots + \overset{n}{L}_n\,a^0 e^{nx}\}.$$

Setzt man aber blos

$$L_p = (n+1)_0 p^n - (n+1)_1 (p-1)^n + (n+1)_2 (p-2)^n - \ldots \quad (12)$$

so ist

$$D^n\left(\frac{1}{a+e^x}\right)$$
$$= \frac{-1}{(a+e^x)^{n+1}}\left\{\overset{n}{L}_1\,a^{n-1}e^x - \overset{n}{L}_2\,a^{n-2}e^{2x} + \overset{n}{L}_3\,a^{n-3}e^{3x} - \ldots\right\} \quad (13)$$

was mit der Eulerschen Formel übereinstimmt.

§ 22.

Höhere Differenzialquotienten solcher Ausdrücke, welche aus goniometrischen Funktionen zusammengesetzt sind.

Die Aufgabe, die höheren Differenzialquotienten solcher Ausdrücke zu entwickeln, welche aus goniometrischen Funktionen bestehen, reduzirt sich im Allgemeinen immer auf die vorhin behandelte der Entwicklung von $D^n f(e^x)$. Da nämlich für $\sqrt{-1} = i$

$$\sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2},$$

so kann man jede Funktion von Sinus oder Cosinus auch als Funktion einer Exponenzialgrösse ansehen und demnach die Lehren des § 20 in Anwendung bringen. Das Technische dieses Verfahrens wird man leicht aus dem folgenden Beispiele ersehen.

Gesetzt man verlangte die independente Darstellung der höheren Differenzialquotienten von den Funktionen

$$\frac{a+\cos x}{1+2a\cos x+a^2} \text{ und } \frac{\sin x}{1+2a\cos x+a^2},$$

so bemerke man, dass dieselben folgendermassen zerlegt werden können:

$$\frac{a+\cos x}{1+2a\cos x+a^2}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2a+e^{xi}+e^{-xi}}{1+a(e^{xi}+e^{-xi})+a^2}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{a+e^{-xi}}+\frac{1}{a+e^{xi}}\right\}$$

und

$$\frac{\sin x}{1+2a\cos x+a^2}$$

$$=\frac{1}{2i}\cdot\frac{e^{xi}-e^{-xi}}{1+a(e^{xi}+e^{-xi})+a^2}=\frac{1}{2i}\left\{\frac{1}{a+e^{-xi}}-\frac{1}{a+e^{xi}}\right\}$$

woraus dann folgt:

$$D^n\left(\frac{a+\cos x}{1+2a\cos x+a^2}\right)=\frac{1}{2}\left\{D^n\left(\frac{1}{a+e^{-xi}}\right)+D^n\left(\frac{1}{a+e^{xi}}\right)\right\} \quad (1)$$

$$D^n\left(\frac{\sin x}{1+2a\cos x+a^2}\right)=\frac{1}{2i}\left\{D^n\left(\frac{1}{a+e^{-xi}}\right)+D^n\left(\frac{1}{a+e^{xi}}\right)\right\}. \quad (2)$$

Es wird also blos darauf ankommen, die höheren Differenzialquotienten der Funktionen

$$\frac{1}{a+e^{-xi}} \text{ und } \frac{1}{a+e^{xi}}$$

zu entwickeln. Hierzu bedienen wir uns des Satzes (4) in § (21), welchen wir unter der folgenden compendiösen Form darstellen:

$$D^n\left(\frac{1}{a+e^x}\right)=-\frac{1}{a}\,\Sigma(-1)^{p-1}\overset{n}{\underset{p}{J}}\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^p,\ p=1,2,\ldots n+1, \quad (3)$$

wobei das Zeichen Σ bedeutet, dass alle die für $p=1, 2, \ldots n+1$ zum Vorschein kommenden Grössen addirt werden sollen. Setzen wir hier kxi für x, wobei $i=\sqrt{-1}$ ist, und bemerken, dass

$$D^n\left(\frac{1}{a+e^x}\right)=\frac{d^n[(a+e^x)^{-1}]}{dx^n}$$

ist, so tritt $ki\,dx$ an die Stelle von dx und folglich geht die linke Seite der Gleichung (3) über in

$$\frac{1}{(ki)^n}\cdot\frac{d^n[(a+e^{kxi})^{-1}]}{dx^n}=\frac{1}{(ki)^n}D^n\left(\frac{1}{a+e^{kxi}}\right).$$

und die Gleichung selbst nimmt nach beiderseitiger Multiplikation mit $(ki)^n$ die Form an

$$D^n\left(\frac{1}{a+e^{kxi}}\right)=-\frac{k^n i^n}{a}\Sigma(-1)^{p-1}\overset{n}{J}_p\left(\frac{e^{kxi}}{a+e^{kxi}}\right)^p. \qquad (4)$$

Diess lässt sich noch folgendermassen umwandeln. Es ist

$$\frac{e^{kxi}}{a+e^{kxi}}=\frac{1}{ae^{-kxi}+1}=\frac{1}{1+a\cos kx-ai\sin kx}.$$

Nehmen wir, mit ϱ eine erst noch zu bestimmende Grösse und mit Θ einen noch unbestimmten spitzen Bogen bezeichnend, $1+a\cos kx=\varrho\cos\Theta$, $a\sin kx=\varrho\sin\Theta$, woraus man

$$\varrho^2=(1+a\cos kx)^2+(a\sin kx)^2$$

oder

$$\varrho=\sqrt{1+2a\cos kx+a^2} \qquad (5)$$

und

$$\tan\Theta=\frac{a\sin kx}{1+a\cos kx},\quad \Theta=\operatorname{Arctan}\frac{a\sin kx}{1+a\cos kx} \qquad (6)$$

erhält, so wird

$$\frac{e^{kxi}}{a+e^{kxi}}=\frac{1}{\varrho(\cos\Theta-i\sin\Theta)}=\frac{\cos\Theta+i\sin\Theta}{\varrho},$$

mithin

$$\left(\frac{e^{kxi}}{a+e^{kxi}}\right)^p=\frac{\cos p\Theta+i\sin p\Theta}{\varrho^p}$$

und folglich nach no. (4)

$$D^n\left(\frac{1}{a+e^{kxi}}\right)=-\frac{k^n i^n}{a}\Sigma(-1)^{p-1}\overset{n}{J}_p\frac{\cos p\Theta+i\sin p\Theta}{\varrho^p}.$$

Hier sind zwei Fälle zu unterscheiden, ob nämlich n gerade oder ungerade ist. Im ersten ist $i^n=(-1)^{\frac{n}{2}}$ und man hat folglich

1) für gerade n

$$D^n\left(\frac{1}{a+e^{kxi}}\right)=\frac{k^n(-1)^{\frac{n}{2}+1}}{a}\Sigma(-1)^{p-1}\overset{n}{J}_p\frac{\cos p\Theta+i\sin p\Theta}{\varrho^p} \qquad (7)$$

im zweiten Falle ist $i^n=i^{n-1}i=(-1)^{\frac{n-1}{2}}i$ und folglich

2) für ungerade n

$$D^n\left(\frac{1}{a+e^{kxi}}\right)=\frac{k^n(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{a}\Sigma(-1)^{p-1}\overset{n}{J}_p\frac{i\cos p\Theta-\sin p\Theta}{\varrho^p}. \qquad (8)$$

Nehmen wir jetzt in der Formel (7) $k=-1$, so wird $k^n=+1$, weil n als gerade vorausgesetzt wird, und

$$\varrho=\sqrt{1+2a\cos x+a^2},$$

welcher spezielle Werth von ϱ mit ν bezeichnet werden möge, so dass

$$\nu=\sqrt{1+2a\cos x+a^2} \tag{9}$$

ist; zugleich wird

$$\Theta=-\operatorname{Arctan}\frac{a\sin x}{1+a\cos x}$$

oder, wenn zur Abkürzung

$$\omega=\operatorname{Arctan}\frac{a\sin x}{1+a\cos x} \tag{10}$$

gesetzt wird $\Theta=-\omega$. Wir haben daher nach (7)

für gerade n

$$D^n\left(\frac{1}{a+e^{-xi}}\right)=\frac{(-1)^{\frac{n}{2}+1}}{a}\Sigma(-1)^{p-1}\overset{n}{J}_p\frac{\cos p\omega-i\sin p\omega}{\nu^p}. \tag{11}$$

Nehmen wir dagegen in (7) $k=+1$, so wird der zweite spezielle Werth von $\varrho=\nu$ und der von $\Theta=+\omega$, folglich

für gerade n

$$D^n\left(\frac{1}{a+e^{xi}}\right)=\frac{(-1)^{\frac{n}{2}+1}}{a}\Sigma(-1)^{p-1}\overset{n}{J}_p\frac{\cos p\omega+i\sin p\omega}{\nu^p}. \tag{12}$$

Setzt man auch in der Formel (8) $k=-1$ und $k=+1$, wobei wegen des ungeraden n, $k^n=-1$ wird, so erhält man leicht:

für ungerade n

$$D^n\left(\frac{1}{a+e^{-xi}}\right)=\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{a}\Sigma(-1)^{p-1}\overset{n}{J}_p\frac{i\cos p\omega+\sin p\omega}{\nu^p} \tag{13}$$

und

$$D^n\left(\frac{1}{a+e^{xi}}\right)=\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{a}\Sigma(-1)^{p-1}\overset{n}{J}_p\frac{-i\cos p\omega+\sin p\omega}{\nu^p}. \tag{14}$$

Dividirt man die Summe der Gleichungen (11) und (12), (13) und (14) mit 2, so erhält man nach (1)

für gerade n

$$D^n\left(\frac{a+\cos x}{1+2a\cos x+a^2}\right)=\frac{(-1)^{\frac{n}{2}+1}}{a}\Sigma(-1)^{p-1}\overset{n}{J}_p\frac{\cos p\omega}{\nu^p} \tag{15}$$

und für ungerade n

$$D^n\left(\frac{a+\cos x}{1+2a\cos x+a^2}\right)=\frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{a}\Sigma(-1)^{p-1}\overset{n}{J}_p\,\frac{\sin p\omega}{\nu^p}. \qquad (16)$$

Dividirt man ebenso die Differenz zwischen den Gleichungen (11) und (12), (13) und (14) mit $2i$, so ist nach Formel (2)
für gerade n

$$D^n\left(\frac{\sin x}{1+2a\cos x+a^2}\right)=\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{a}\Sigma(-1)^{p-1}\overset{n}{J}_p\frac{\sin p\omega}{\nu^p} \qquad (17)$$

und für ungerade n

$$D^n\left(\frac{\sin x}{1+2a\cos x+a^2}\right)=\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{a}\Sigma(-1)^{p-1}\overset{n}{J}_p\frac{\cos p\omega}{\nu^p}, \qquad (18)$$

wobei man noch für ν und ω ihre Werthe aus (9) und (10), so wie für p der Reihe nach die Zahlen $1, 2, 3, \ldots n+1$ zu setzen hat.

Schreibt man in den Formeln, welche für gerade n gelten, $2n$ für n und in denen, welche ein ungerades n voraussetzen, $2n-1$ für n, so erhält man:

$$\left.\begin{array}{c} D^{2n}\left(\frac{a+\cos x}{1+2a\cos x+a^2}\right)=\frac{(-1)^{n+1}}{a}\Sigma(-1)^{p-1}\overset{2n}{J}_p\,\frac{\cos p\omega}{\nu^p} \\ p=1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ 2n+1. \end{array}\right\} \qquad (19)$$

$$\left.\begin{array}{c} D^{2n-1}\left(\frac{a+\cos x}{1+2a\cos x+a^2}\right)=\frac{(-1)^{n+1}}{a}\Sigma(-1)^{p-1}\overset{2n-1}{J}_p\,\frac{\sin p\omega}{\nu^p} \\ p=1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ 2n. \end{array}\right\} \qquad (20)$$

$$\left.\begin{array}{c} D^{2n}\left(\frac{\sin x}{1+2a\cos x+a^2}\right)=\frac{(-1)^{n}}{a}\Sigma(-1)^{p-1}\overset{2n}{J}_p\,\frac{\sin p\omega}{\nu^p} \\ p=1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ 2n+1. \end{array}\right\} \qquad (21)$$

$$\left.\begin{array}{c} D^{2n-1}\left(\frac{\sin x}{1+2a\cos x+a^2}\right)=\frac{(-1)^{n-1}}{a}\Sigma(-1)^{p-1}\overset{2n-1}{J}_p\,\frac{\sin p\omega}{\nu^p} \\ p=1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ 2n. \end{array}\right\} \qquad (22)$$

§ 23.

Die höheren Differenzialquotienten der Tangente, Cotangente, Sekante und Cosekante.

Die Formeln, welche wir im vorigen Paragraphen für die höheren Differenzialquotienten der Funktion

$$\frac{\sin x}{1+2a\cos x+a^2}$$

gefunden haben, liefern uns zugleich die höheren Differenzialquotienten von $\frac{1}{2}\tan\frac{1}{2}x$ und $\frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}x$; weil diese letzteren Funktionen aus der obigen durch die zwei Spezialisirungen $a=+1$ und $a=-1$ entspringen.

Für $a=+1$ wird

$$\frac{\sin x}{1+2a\cos x+a^2}=\frac{2\sin\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x}{2(1+\cos x)}=\frac{2\sin\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x}{4\cos^2\frac{1}{2}x}=\frac{1}{2}\tan\frac{1}{2}x,$$

ferner nach no. (9) und (10)

$$v=\sqrt{2(1+\cos x)}=2\cos\tfrac{1}{2}x$$

$$\omega=\text{Arctan}\,\frac{\sin x}{1+\cos x}=\text{Arctan}\tan\tfrac{1}{2}x,$$

und wenn wir voraussetzen, dass $\frac{1}{2}x$ ein spitzer Winkel sei,

$$\omega=\tfrac{1}{2}x.$$

Demnach erhalten wir aus den Formeln (21) und (22)

$$\tfrac{1}{2}D^{2n}\tan\tfrac{1}{2}x=(-1)^n\,\Sigma(-1)^{p-1}\overset{2n}{J}_p\,\frac{\sin\frac{1}{2}px}{(2\cos\frac{1}{2}x)^p},$$

$$\tfrac{1}{2}D^{2n-1}\tan\tfrac{1}{2}x=(-1)^{n-1}\,\Sigma(-1)^{p-1}\overset{2n-1}{J}_p\,\frac{\cos\frac{1}{2}px}{(2\cos\frac{1}{2}x)^p}.$$

Setzen wir noch $2x$ für x, so ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n}}.D^{2n-1}\tan x\\ =\;&\overset{2n-1}{J}_1\frac{\cos x}{2\cos x}-\overset{2n-1}{J}_2\frac{\cos 2x}{(2\cos x)^2}+\overset{2n-1}{J}_3\frac{\cos 3x}{(2\cos x)^3}-\ldots-\overset{2n-1}{J}_{2n}\frac{\cos 2nx}{(2\cos x)^{2n}}\end{aligned}\right\}\;(1)$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{(-1)^{n}}{2^{2n+1}}D^{2n}\tan x\\ =\;&\overset{2n}{J}_1\frac{\sin x}{2\cos x}-\overset{2n}{J}_2\frac{\sin 2x}{(2\cos x)^2}+\overset{2n}{J}_3\frac{\sin 3x}{(2\cos x)^3}-\ldots+\overset{2n}{J}_{2n+1}\frac{\sin(2n+1)x}{(2\cos x)^{2n+1}},\end{aligned}\right\}\;(2)$$

wobei nun x ein Bogen des ersten Quadranten sein muss.

Beide Formeln würden sich übrigens in eine einzige zusammenziehen lassen, wenn man zwei noch unbestimmte Grössen ε und η einführte und schriebe

$$\left.\begin{array}{c}\frac{(-1)^{\frac{1}{2}(m-\varepsilon)}}{2^{m+1}} D^m \tan x = \\ \overset{m}{J}_1 \frac{\varepsilon \cos x + \eta \sin x}{2\cos x} - \overset{m}{J}_2 \frac{\varepsilon \cos 2x + \eta \sin 2x}{(2\cos x)^2} + \overset{m}{J}_3 \frac{\varepsilon \cos 3x + \eta \sin 3x}{(2\cos x)^3} - \ldots \\ \ldots + (-1)^m \overset{m}{J}_{m+1} \frac{\varepsilon \cos (m+1)x + \eta \sin (m+1)x}{(2\cos x)^{m+1}}.\end{array}\right\} \quad (3)$$

Diese Gleichung würde für $m=2n-1$ und $m=2n$ in die unter (1) und (2) stehenden Formeln übergehen, wenn man die noch unbestimmten Grössen ε und η so zu wählen wüsste, dass für jedes ungerade m zugleich $\varepsilon=1$ und $\eta=0$, dagegen für jedes gerade m gleichzeitig $\varepsilon=0$ und $\eta=1$ würde. Es hat aber keine Schwierigkeit, eine solche Wahl zu treffen; man braucht nur zu setzen:

$$\varepsilon = \frac{1+(-1)^{m-1}}{2}, \quad \eta = \frac{1-(-1)^{m-1}}{2}, \tag{4}$$

dann sind die den Grössen ε und η auferlegten Bedingungen erfüllt und die Formel (3) gilt dann allgemein.

Ebenso leicht würde man aus den Formeln (21) und (22) im vorigen Paragraphen die höheren Differenzialquotienten der Cotangente ableiten, indem man $a=-1$ setzte; man gelangt aber rascher dazu, wenn man in die so eben entwickelte Formel (3) $\frac{\pi}{2}-x$ für x substituirt. Man hat dann

$$\frac{(-1)^{\frac{1}{2}(m+\varepsilon)}}{2^{m+1}} D^m \cot x \tag{5}$$

$$= \overset{m}{J}_1 \frac{\varepsilon \cos(\frac{\pi}{2}-x) + \eta \sin(\frac{\pi}{2}-x)}{2\sin x} - \overset{m}{J}_2 \frac{\varepsilon \cos 2(\frac{\pi}{2}-x) + \eta \sin 2(\frac{\pi}{2}-x)}{(2\sin x)^2} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^m \overset{m}{J}_{m-1} \frac{\varepsilon \cos (m+1)(\frac{\pi}{2}-x) + \eta \sin (m+1)(\frac{\pi}{2}-x)}{(2\sin x)^{m+1}}.$$

Für die Differenziation der Sekante halten wir uns an die bekannte goniometrische Relation

$$\sec x = \tan(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}) - \tan x,$$

aus welcher

$$D^m \sec x = D^m \tan(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}) - D^m \tan x$$

folgt. Da nun die beiden Differenzialquotienten auf der rechten Seite

nach Formel (3) leicht angegeben werden können, so sind hierdurch auch die höheren Differenzialquotienten der Sekante vollständig bestimmt.

Die Differenziation der Cosekante kommt ebenfalls auf die Differenziationen von Tangenten und Cotangenten zurück; denn da nach einer bekannten Formel der Goniometrie

$$\operatorname{cosec} x = \tan \tfrac{1}{2} x + \cot x$$

ist, so folgt

$$D^m \operatorname{cosec} x = D^m \tan \tfrac{1}{2} x + D^m \cot x, \tag{7}$$

wo es nun keine Schwierigkeiten hat, die auf der rechten Seite vorkommenden Differenzialquotienten mit Hülfe der Formeln (3) und (5) vollständig zu entwickeln.

§ 24.

Independente Bestimmung von $D^n f(lx)$.

Auf ähnliche Weise, wie wir das Bildungsgesetz der höheren Differenzialquotienten von Funktionen einer Potenz und einer Exponenzialgrösse entdeckt haben, können wir auch noch die allgemeine Form nachweisen, unter welche sich die höheren Differenzialquotienten einer beliebigen Funktion des Logarithmus stellen, wobei wir den Logarithmus als natürlichen voraussetzen. Zunächst gelangt man leicht zu den folgenden Gleichungen:

$$Df(lx) = \frac{1}{x} f'(lx)$$

$$D^2 f(lx) = \frac{1}{x^2} \{ f''(lx) \}$$

$$D^3 f(lx) = \frac{1}{x^3} \{ f'''(lx) - 3f''(lx) + 2f'(lx) \}$$

u. s. f.,

welche auf die allgemeine Form

$$D^n f(lx) \tag{1}$$
$$= \frac{1}{x^n} \{ \overset{n}{A}_0 f^{(n)}(lx) - \overset{n}{A}_1 f^{(n-1)}(lx) + \overset{n}{A}_2 f^{(n-2)}(lx) - \ldots \pm \overset{n}{A}_{n-1} f'(lx) \}$$

hinweisen, worin

$$\overset{n}{A}_0, \overset{n}{A}_1, \overset{n}{A}_2, \ldots \overset{n}{A}_{n-1}$$

gewisse rein numerische Coeffizienten bedeuten. Zu ihrer Bestimmung dient uns wieder der schon mehrmals gebrauchte Kunstgriff, welcher in der Substitution einer solchen Funktion für f besteht, dass man die auf beiden Seiten der Gleichung (1) vorkommenden Differenziationen unabhängig von einander ausführen kann. Die passendste Wahl in dieser Beziehung ist

$$f(y) = e^{-\mu y},$$

woraus durch $p$malige Differenziation folgt

$$f^{(p)}(y) = (-1)^p \mu^p e^{-\mu y},$$

folglich

$$f^{(p)}(lx) = (-1)^p \mu^p x^{-\mu}. \qquad (2)$$

Ferner ist unmittelbar

$$f(lx) = x^{-\mu}$$

und mithin

$$D^n f(lx) = (-1)^n \mu(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+n-1)\, x^{-\mu-n}.$$

Substituiren wir diesen Ausdruck nebst Dem, was sich aus no. (2) für $p=n$, $n-1$, $n-2$, ... 2 , 1 ergiebt, in die Gleichung (1), so ergiebt sich nach einiger Hebung

$$\left.\begin{aligned} &\mu(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+n-1) \\ &= \overset{n}{A}_0 \mu^n + \overset{n}{A}_1 \mu^{n-1} + \overset{n}{A}_2 \mu^{n-2} + \ldots + \overset{n}{A}_{n-1} \mu \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Es ist hiernach sehr leicht, die Bedeutung der fraglichen Coeffizienten und ihre Werthe zu erkennen. Verwandelt man nämlich ein Produkt von der Form

$$\mu(\mu+a_1)(\mu+a_2)\ldots(\mu+a_{n-1}) \qquad (4)$$

durch gewöhnliche Multiplikation in eine nach absteigenden Potenzen von μ geordnete Reihe, so findet man für die letztere

$$\mu^n + C_1 \mu^{n-1} + C_2 \mu^{n-2} + \ldots + C_{n-1} \mu \qquad (5)$$

und dabei ist

$$\begin{aligned} C_1 &= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} \\ C_2 &= a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_1 a_4 + \ldots + a_1 a_{n-1} \\ &\quad + a_2 a_3 + a_2 a_4 + \ldots + a_2 a_{n-1} \\ &\quad + a_3 a_4 + \ldots + a_3 a_{n-1} \\ &\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\quad + a_{n-2} a_{n-1} \end{aligned}$$

d. h. C_2 gleich der Summe der Combinationen zu je zweien (ohne Wiederholungen) aus den $n-1$ Elementen $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$, wobei jede Combination als Produkt angesehen wird; ebenso ist

$$\begin{aligned} C_3 = a_1 a_2 a_3 + a_1 a_2 a_4 + \ldots + a_1 a_2 a_{n-1} \\ + a_1 a_3 a_4 + a_1 a_3 a_5 + \ldots + a_1 a_3 a_{n-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + a_2 a_3 a_4 + \ldots + a_2 a_3 a_{n-1} \\ + a_2 a_4 a_5 + \ldots + a_2 a_4 a_{n-1} \\ \ldots\ldots\ldots \\ + a_{n-3} a_{n-2} a_{n-1} \end{aligned}$$

also C_3 gleich der Summe der Combinationen zu je dreien; auf gleiche Weise würde man weiter gehen können, bis zuletzt

$$C_{n-1} = a_1 a_2 a_3 \ldots a_{n-1}.$$

Nehmen wir nun $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $\ldots a_{n-1} = n-1$, so werden die Ausdrücke in (4) und (5) identisch mit der linken und rechten Seite der Gleichung (3), und folglich ist dann

$$\overset{n}{A}_0 = 1 \,,\; \overset{n}{A}_1 = 1+2+\ldots+n-1,$$

ferner $\overset{n}{A}_2$ gleich der Summe der in den Zahlen $1, 2, \ldots n-1$ liegenden Amben (jede Ambe als Produkt angesehen), $\overset{n}{A}_3$ gleich der Ternensumme u. s. f. Bildet man überhaupt aus den $(n-1)$ ersten natürlichen Zahlen Combinationen, von denen jede einzelne p solcher Zahlen enthält, und bezeichnet mit $\overset{n-1}{C}_p$ die Summe aller dieser als Produkte betrachteten Combinationen, so ist

$$\overset{n}{A}_p = \overset{n-1}{C}_p \tag{6}$$

und hiermit die Bestimmung der fraglichen Coeffizienten gegeben, so dass jetzt die Gleichung

$$\begin{aligned} &D^n f(lx) &(7) \\ &= \frac{1}{x^n} \{ f^{(n)}(lx) - \overset{n-1}{C}_1 f^{(n-1)}(lx) + \overset{n-1}{C}_2 f^{(n-2)}(lx) - \ldots + (-1)^{n-1} \overset{n-1}{C}_{n-1} f'(lx) \} \end{aligned}$$

die vollständige Lösung des Problems darstellt. Man kann übrigens statt einer independenten Bestimmung der hier vorkommenden Coeffizienten auch leicht eine rekursive Berechnung derselben zeigen. Da nämlich

$$\mu(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+n-1)$$
$$=\mu^n+\overset{n-1}{C}_1\mu^{n-1}+\overset{n-1}{C}_2\mu^{n-2}+\ldots+\overset{n-1}{C}_{n-1}\mu$$

ist, so folgt, wenn $\mu+1$ für μ gesetzt wird,

$$\left.\begin{array}{l}(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)\ldots(\mu+n)\\ =(\mu+1)^n+\overset{n-1}{C}_1(\mu+1)+\overset{n-1}{C}_2(\mu+1)^{n-2}+\ldots+\overset{n-1}{C}_{n-1}(\mu+1)\end{array}\right\}\quad(8)$$

Andererseits ist aber auch

$$\left.\begin{array}{l}(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+n)=\dfrac{\mu+n}{\mu}\,\mu(\mu+1)\ldots(\mu+n-1)\\ =(1+\dfrac{n}{\mu})\,\{\mu^n+\overset{n-}{C}_1\mu^{n-1}+\overset{n-1}{C}_2\mu^{n-2}+\ldots+\overset{n-1}{C}_{n-1}\mu\}\end{array}\right\}\quad(9)$$

Ordnet man nun die beiden Reihen in (8) und (9) nach Potenzen von μ, was bei der ersten durch Anwendung des Binomialtheoremes, bei der zweiten durch Ausführung der angedeuteten Multiplikation mit $1+\frac{n}{\mu}$ geschieht, und vergleicht dann die Coeffizienten gleicher Potenzen von μ, z. B. der Potenz μ^{n-p}, so ergiebt sich die Relation

$$n_p+(n-1)_{p-1}\overset{n-1}{C}_1+(n-2)_{p-2}\overset{n-1}{C}_2+\ldots+(n-p+1)_1\overset{n-1}{C}_{p-1}$$
$$=\overset{n-1}{C}_p+n\overset{n-1}{C}_{p-1},$$

welche dazu dient, um irgend einen Coeffizienten $\overset{n-1}{C}_p$ aus allen seinen Vorgängern $\overset{n-1}{C}_1$, $\overset{n-1}{C}_2$, ... $\overset{n-1}{C}_{p-1}$ zu berechnen. Als Beispiel für das Theorem in (7) diene die Annahme

$$f(y)=y^\mu,$$

woraus

$$f^{(p)}(y)=\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-p+1)y^{\mu-p}$$
$$=\overset{p}{[\mu]}y^{\mu-p}$$

folgt, und weiter

$$D^n(lx)^\mu=$$
$$\frac{(lx)^{\mu-n}}{x^n}\,\{\overset{n}{[\mu]}-\overset{n-1}{C}_1\overset{n-1}{[\mu]}lx+\overset{n-1}{C}_2\overset{n-2}{[\mu]}(lx)^2-\ldots\}\quad(11)$$

Ueberblicken wir den Gedankengang, den wir bisher für die Differenziation zusammengesetzter Funktionen befolgt haben, so erhellt, dass uns nach der Bestimmung von $D^nf(x\lambda)$, $D^nf(e^x)$, $D^nf(lx)$ noch die

Pflicht obläge, auch die höheren Differenzialquotienten von $f(\cos x)$, $f(\sin x)$, $f(\text{Arcsin}\,x)$, $f(\text{Arctan}\,x)$ etc. zu entwickeln, indem wir dann diejenige Reihe von Aufgaben gelöst hätten, welche entspringt, sobald man in $D^n f[\varphi(x)]$ für $\varphi(x)$ die Funktionen der algebraischen Analysis nach einander substituirt. Jene Forderung lässt sich nun zwar befriedigen, aber die Resultate des betreffenden Calcüls haben bis jetzt noch eine so wenig elegante und abgerundete Form, dass von einer praktischen Brauchbarkeit derselben noch keine Rede sein kann, und daher möge die Entwickelung dieser weitläuftigen Rechnungen unterbleiben

§. 25.

Die höheren Differenzialquotienten der Funktionen mehrerer unabhängigen Veränderlichen.

Enthält eine Funktion verschiedene von einander unabhängige Variabele, so kann man dieselbe entweder nach einer der Veränderlichen allein, oder bald nach dieser bald nach jener Variabelen mehrmals hinter einander differenziren. Der erste Fall kommt auf die schon betrachteten Differenziationen der Funktionen mit nur einer Veränderlichen zurück, weil die übrigen Variabelen nicht geändert werden und folglich die Rollen constanter Grössen spielen; wichtiger dagegen ist die Betrachtung solcher Differenziationen, bei denen mit den Veränderlichen gewechselt wird. So könnte man z. B. eine Funktion zweier Variabelen $f(x, y)$ erst nach x differenziren, wodurch man den partiellen Differenzialquotienten $\frac{df(x,y)}{dx}$ erhielte und, weil dieser wieder eine Funktion von x und y bildet, hierauf eine zweite Differenziation nach y vornehmen, wodurch man auf den zweiten Differenzialquotienten

$$\frac{d\,\frac{df(x,y)}{dx}}{dy} \tag{1}$$

kommt. Man bezeichnet denselben durch

$$\frac{d^2 f(x,y)}{dy\,dx}, \tag{2}$$

wobei die Stellung von dx und dy im Nenner die Ordnung der Differenziationen anzeigt, indem man von der Rechten zur Linken fortschreitet, um an den der Reihe nach dastehenden Differenzialen die Verän-

derlichen zu erkennen, nach welchen die successiven Differenziationen vor sich gehen sollen. Man wird auch leicht bemerken, dass diese Bezeichnungsweise vollkommen passend ist. Denn da in (1) die Variable x von y unabhängig ist, so hängt auch dx nicht von y ab, ist also constant für eine Differenziation nach y. Statt des Ausdrucks in (1) lässt sich daher auch der folgende schreiben

$$\frac{\frac{ddf(x,y)}{dx}}{dy},$$

welcher in den unter no. (2) enthaltenen übergeht, wenn man die, hier durch die Bruchstriche angedeutete Ordnung der Differenziationen durch die Stellung der Differenziale gegen einander bezeichnet.

Differenzirt man die Funktion $f(x,y)$ erst nach y und den entstehenden partiellen Differenzialquotienten nach x, so hat man ähnlich

$$\frac{d\frac{df(x,y)}{dy}}{dx} = \frac{d^2f(x,y)}{dx\,dy}. \tag{3}$$

Es liegt hier die Frage sehr nahe, in welcher Relation stehen die Ausdrücke (2) und (3) zu einander, d. h. wie verhalten sich die zwei Resultate, welche man erhält, wenn man die zwei Differenziationen von $f(x,y)$ in doppelter Ordnung vornimmt? Es ist sehr leicht, diese Frage zu beantworten, wenn man sich die Entstehungsweise beider Ausdrücke vergegenwärtigt.

Für den partiellen Differenzialquotienten von $f(x,y)$ nach x ist bekanntlich

$$\frac{df(x,y)}{dx} = \text{Lim}\frac{f(x+\Delta x,y) - f(x,y)}{\Delta x}.$$

So lange nun Δx auf der rechten Seite noch nicht in Null übergegangen ist, so lange ist der Quotient auf der rechten Seite auch dem Differenzialquotienten links nicht gleich, sondern um irgend eine Grösse ξ davon verschieden, so dass wir setzen können

$$\frac{df(x,y)}{dx} = \frac{f(x+\Delta x,y) - f(x,y)}{\Delta x} + \xi.$$

Hierbei ist ξ irgend eine Funktion von x, y und Δx, die wir nicht näher zu kennen brauchen, von der wir aber gewiss wissen, dass sie für unbegränzt abnehmende Δx sich der Null unbegränzt nähert, weil

sonst die ganze Gleichung nicht in die vorhergehende überginge, sobald man das völlig willkührliche Δx unendlich abnehmen lassen will. Differenzirt man die vorstehende Gleichung nach y, so kommt

$$\frac{d^2 f(x,y)}{dy\,dx} = \frac{d\left\{\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}\right\}}{dy} + \frac{d\xi}{dy}$$

oder nach dem Begriffe des Differenzialquotienten

$$\frac{d^2 f(x,y)}{dy\,dx} = \operatorname{Lim} \frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)-\{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)\}}{\Delta y\,\Delta x} + \frac{d\xi}{dy}.$$

Hier bezieht sich das Lim. zeichen allein auf die Abnahme des Δy, während Δx noch ungeändert bleibt. Da aber Δx beliebig ist, so können wir auch Δx mit Δy gleichzeitig (wiewohl immer unabhängig davon) abnehmen lassen, wodurch sich ξ, folglich auch $\frac{d\xi}{dy}$ der Gränze Null nähert. Wir haben dann

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2 f(x,y)}{dy\,dx}\\ &= \operatorname{Lim} \frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)-f(x+\Delta x,y)+f(x,y)}{\Delta y\,\Delta x}\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

und jetzt geht das Zeichen Lim auf eine gemeinschaftliche unbegränzte Abnahme von Δx und Δy.

Zu dieser Betrachtung lässt sich leicht das Gegenstück stellen. Wir können nämlich, wenn wir der Grösse Δy einen bestimmten endlichen Werth geben, setzen

$$\frac{df(x,y)}{dy} = \frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y} + \eta,$$

wobei η eine Funktion von x, y, Δy bedeutet, welche für unendlich abnehmende Δy die Null zur Gränze hat. Es folgt nun durch Differenziation nach x

$$\frac{d^2 f(x,y)}{dx\,dy} = \frac{d\left\{\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}\right\}}{dx} + \frac{d\eta}{dx}$$

oder

$$\frac{d^2 f(x,y)}{dx\,dy}$$
$$= \text{Lim}\,\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y) - \{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)\}}{\Delta x\,\Delta y} + \frac{d\eta}{dx}$$

wobei sich das Zeichen Lim blos auf die Abnahme von Δx bezieht, während Δy seinen beliebigen endlichen Werth behält. Lassen wir aber Δy mit Δx gleichzeitig abnehmen, so nähert sich η, folglich auch $\frac{d\eta}{dx}$ der Gränze Null und wir haben daher für gemeinschaftlich abnehmende Δx und Δy,

$$\frac{d^2 f(x,y)}{dx\,dy}$$
$$= \text{Lim}\,\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y) - f(x, y+\Delta y) + f(x,y)}{\Delta x\,\Delta y}.$$

Vergleichen wir die rechte Seite dieses Ausdruckes mit der rechten Seite in (4), so ergiebt sich uns aus der Identität beider die wichtige Relation

$$\frac{d^2 f(x,y)}{dy\,dx} = \frac{d^2 f(x,y)}{dx\,dy}.$$

Soll also eine Funktion zweier Veränderlichen nach jeder dieser Veränderlichen einmal differenzirt werden, so ist es gleichgültig, in welcher Ordnung beide Differenziationen auf einander folgen.

Es ist nicht schwer, die geometrische Bedeutung dieses Satzes einzusehen. Denken wir uns nämlich in fig. 8 drei auf einander senkrechte Ebenen, setzen $OX = x$, $XY = y$, $YZ = z$ und $z = \varphi(x,y)$, so beschreibt bekanntlich der Punkt z eine gewisse Fläche, sobald x und y alle möglichen verschiedenen Werthe annehmen. Bezeichnen wir den cubischen Inhalt des Körpers $OBCZYX$ mit $f(x,y)$ und lassen x um das $XX' = \Delta x$ wachsen, so ist der Inhalt von $OBCZ'Y'X' = f(x+\Delta x, y)$ und folglich

$$f(x+\Delta x, y) - f(x,y) = XYZZ'Y'X'.$$

Der Inhalt von $XYZZ'Y'X'$ lässt sich aber näherungsweis durch das Produkt aus Grundfläche und Höhe, nämlich $XYZ.XX' = XYZ.\Delta x$ ausdrücken, woraus folgt, dass näherungsweis

$$\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} = XYZ$$

ist und zwar um so richtiger, je kleiner Δx genommen wird. Gehen wir zur Gränze für unendlich abnehmende Δx über, so verwandelt sich die obige Näherungsformel in die völlig genaue

$$\frac{df(x,y)}{dx} = XYZ.$$

Differenziren wir diese Gleichung nach y und bemerken, dass der Differenzialquotient einer Ebene die sie begränzende letzte Ordinate ist, so ergiebt sich

$$\frac{d^2 f(x,y)}{dy\, dx} = YZ = z. \tag{6}$$

Geben wir dagegen (fig. 9) in der Gleichung $f(x,y) = OBCZYX$ dem y einen Zuwachs $YY' = \Delta y$, so ist $f(x,y+\Delta y) = OB'C'Z'Y'X)$ folglich

$$f(x,y+\Delta y) - f(x,y) = BCC'Z'Y'YZ,$$

wobei wir näherungsweis $BCC'Z'Y'YZ = BCZY.YY' = BCZY.\Delta y$ setzen können, woraus folgt

$$\frac{f(x,y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} = BCZY$$

und mit völliger Genauigkeit, wenn wir zur Gränze für unendlich abnehmende Δy übergehen,

$$\frac{df(x,y)}{dy} = BCZY,$$

Durch Differenziation dieses Ausdruckes nach $x = OX = BY$ kommen wir an die Gränze YZ der Ebene $BCZY$, so dass

$$\frac{d^2 f(x,y)}{dx\, dy} = YZ = z$$

ist. Bei Vergleichung dieses Resultates mit dem unter no. (6) gefundenen ergiebt sich wieder die Richtigkeit des in (5) aufgestellten Satzes.

Aber nicht blos für zwei Veränderliche gilt die Bemerkung, dass die Ordnung der Differenziationen keinen Einfluss auf das Endresultat hat, sondern auch für drei und mehrere Veränderliche behält dieselbe ihre Richtigkeit. Wäre z. B. eine Funktion von drei Variabelen, etwa der Ausdruck $f(x,y,z)$ nach jeder derselben einmal zu differenziren, so kann man auf folgende Weise verfahren.

Nach dem vorigen Theoreme gelten folgende Gleichungen:

$$\frac{d^2f(x,y,z)}{dy\,dx}=\frac{d^2f(x,y,z)}{dx\,dy},$$

$$\frac{d^2f(x,y,z)}{dz\,dx}=\frac{d^2f(x,y,z)}{dx\,dz},$$

$$\frac{d^2f(x,y,z)}{dz\,dy}=\frac{d^2f(x,y,z)}{dy\,dz}.$$

Differenzirt man die erste nach z, die zweite nach y, die dritte nach x, so ergeben sich daraus die folgenden:

$$\frac{d^3f(x,y,z)}{dz\,dy\,dx}=\frac{d^3f(x,y,z)}{dz\,dx\,dy} \quad (7)$$

$$\frac{d^3f(x,y,z)}{dy\,dz\,dx}=\frac{d^3f(x,y,z)}{dy\,dx\,dz} \quad (8)$$

$$\frac{d^3f(x,y,z)}{dx\,dz\,dy}=\frac{d^3f(x,y,z)}{dx\,dy\,dz} \quad (9)$$

Ferner ist aber auch $\frac{df(x,y,z)}{dz}$ eine Funktion von x und y und durch Differenziation derselben nach x und y unserem früheren Theoreme gemäss

$$\frac{d^2\left\{\frac{df(x,y,z)}{dz}\right\}}{dy\,dx}=\frac{d^2\left\{\frac{df(x,y,z)}{dz}\right\}}{dx\,dy},$$

d. i.

$$\frac{d^3f(x,y,z)}{dy\,dx\,dz}=\frac{d^3f(x,y,z)}{dx\,dy\,dz}. \quad (10)$$

Differenzirt man ebenso $\frac{df(x,y,z)}{dy}$ nach x und z, $\frac{df(x,y,z)}{dx}$ nach y und z, so ergeben sich noch die Gleichungen:

$$\frac{d^3f(x,y,z)}{dz\,dx\,dy}=\frac{d^3f(x,y,z)}{dx\,dz\,dy}. \quad (11)$$

$$\frac{d^3f(x,y,z)}{dz\,dy\,dx}=\frac{d^3f(x,y,z)}{dy\,dz\,dx}. \quad (12)$$

Beachtet man, dass die rechten Seiten dieser Gleichungen der Reihe nach der rechten Seite von (9), der linken von (9) und der linken von (8), und ebenso die linken Seiten von (10), (11), (12) der rechten Seite in (8), der rechten in (7) und der linken in (6) entsprechen, so erhellt, dass überhaupt die sechs Formen, welche man durch alle verschiedenen Anordnungen der drei Differenziationen bekommt, einander gleich sind und es mithin für das Resultat gleichgültig ist, in wel-

cher Reihenfolge man die Differenziationen vornimmt. Ebenso leicht würde man zeigen können, dass in Ausdrücken, wie

$$\frac{d^4 f(x,y,z,u)}{dx\,dy\,dz\,du},\quad \frac{d^5 f(x,y,z,u,v)}{dx\,dy\,dz\,du\,dv} \text{ etc.},$$

auf die Anordnung der Differenziationen nichts ankommt.

Differenzirt man eine Funktion mehrerer Variabeln, etwa $f(x,y,z)$, mehrmals z. B. $m$mal nach x, darauf $n$mal nach y und zuletzt $p$mal nach z, so bezeichnet man den herauskommenden Differenzialquotienten mit

$$\frac{d^{m+n+p} f(x,y,z)}{dz^p\,dy^n\,dx^m}$$

und nennt ihn den partiellen Differenzialquotienten der Ordnung $m+n+p$ in Bezug auf die Differenziationen nach x, y, z. Man wird sich auch hier sehr leicht überzeugen, dass es gleichgültig ist, in welcher Ordnung diese Differenziationen verrichtet werden, dass man also ebenso gut schreiben kann:

$$\frac{d^{m+n+p} f(x,y,z)}{dx^m\,dy^n\,dz^p}$$

was gewöhnlich zu geschehen pflegt.

Mit Hülfe solcher partieller Differenzialquotienten kann man leicht die höheren totalen Differenziale einer Funktion mehrerer Variabelen entwickeln, wie man an den folgenden Beispielen sehen wird.

Man hat bekanntlich

$$df(x,y) = \frac{df(x,y)}{dx}dx + \frac{df(x,y)}{dy}dy,$$

folglich unter Anwendung des nämlichen Satzes selbst

$$d^2 f(x,y) = \frac{d\left\{\frac{df(x,y)}{dx}dx\right\}}{dx}dx + \frac{d\left\{\frac{df(x,y)}{dx}dx\right\}}{dy}dy$$
$$+ \frac{d\left\{\frac{df(x,y)}{dy}dy\right\}}{dx}dx + \frac{d\left\{\frac{df(x,y)}{dy}dy\right\}}{dy}dy,$$

d. i. wenn man die Gleichungen

$$\frac{d\,\frac{df(x,y)}{dx}}{dx} = \frac{d^2 f(x,y)}{dx^2},\quad \frac{d\,\frac{df(x,y)}{dy}}{dy} = \frac{d^2 f(x,y)}{dy^2}$$

und

$$\frac{d\frac{df(x,y)}{dx}}{dy} = \frac{d\frac{df(x,y)}{dy}}{dx} = \frac{d^2f(x,y)}{dx\,dy}$$

berücksichtigt.

$$d^2f(x,y) = \frac{d^2f(x,y)}{dx^2}dx^2 + 2\frac{d^2f(x,y)}{dx\,dy}dx\,dy + \frac{d^2f(x,y)}{dy^2}dy^2.$$

Hieraus folgt die neue Differenziation:

$$d^3f(x,y) = \frac{d\left\{\frac{d^2f(x,y)}{dx^2}dx^2\right\}}{dx}dx + \frac{d\left\{\frac{d^2f(x,y)}{dx^2}dx^2\right\}}{dy}dy$$
$$+ 2\frac{d\left\{\frac{d^2f(x,y)}{dx\,dy}dx\,dy\right\}}{dx}dx + 2\frac{d\left\{\frac{d^2f(x,y)}{dx\,dy}dx\,dy\right\}}{dy}dy$$
$$+ \frac{d\left\{\frac{d^2f(x,y)}{dy^2}dy^2\right\}}{dx}dx + \frac{d\left\{\frac{d^2f(x,y)}{dy^2}dy^2\right\}}{dy}dy$$

und durch Vereinigung der homologen Glieder

$$d^3f(x,y) =$$
$$\frac{d^3f(x,y)}{dx^3}dx^3 + 3\frac{d^3f(x,y)}{dx^2dy}dx^2dy + 3\frac{d^3f(x,y)}{dx\,xy^2}dx\,dy^2 + \frac{d^3f(x,y)}{dy^3}dy^3.$$

Man übersieht gleich, wie sich dieses Verfahren beliebig weit fortsetzen lässt und dass die Coeffizienten, welche der Reihe nach vorkommen, die Binomialkoeffizienten der jedesmaligen Ordnung sein müssen, weil sie sich ebenso wie diese durch successive Additionen bilden. Man hat demnach allgemein

$$d^nf(x,y) = \frac{d^nf(x,y)}{dx^n}dx^n + n_1\frac{d^nf(x,y)}{dx^{n-1}dy}dx^{n-1}dy + n_2\frac{d^nf(x,y)}{dx^{n-2}dy^2}dx^{n-2}dy^2 +$$
$$\ldots + n_{n-1}\frac{d^nf(x,y)}{dx\,dy^{n-1}}dx\,dy^{n-1} + \frac{d^nf(x,y)}{dy^n}dy^n. \qquad (13)$$

Dieses Theorem enthält als speziellen Fall die Formel (2) in §. 13, wenn man $f(x,y) = y\varphi(x)$ und nachher $y = \psi(x)$ setzt. Man hat nämlich dann für ein positives ganzes h:

$$\frac{d^{n-h}f(x,y)}{dx^{n-h}} = y\frac{d^{n-h}\varphi(x)}{dx^{n-h}}$$

und wenn man noch $h$mal nach y differenzirt

$$\frac{d^nf(x,y)}{dx^{n-h}dy^h} = \frac{d^hy}{dy^h}\cdot\frac{d^{n-h}\varphi(x)}{dx^{n-h}}$$

und für $y = \psi(x)$ und durch Multiplikation mit $dx^{n-h}dy^h$

$$\frac{d^n f(x,y)}{dx^{n-h}dy^h}dx^{n-h}dy^h = d^h\psi(x)\,d^{n-h}\varphi(x).$$

Benutzen wir dies für $h=0, 1, 2, \ldots. n$ in der Gleichung (13) und dividiren nachher mit dx^n, so gelangen wir wieder zu der Formel (2) in §. 13.

Ganz das nämliche Verfahren ist gleichförmig auch zur Entwickelung von $d^n f(x,y,z)$, $d^n f(x,y,z,u)$ etc. anwendbar.

Cap. V. Relationen zwischen verschiedenen Funktionen und ihren höheren Differenzialquotienten.

§. 26.

Beziehungen zwischen einer Funktion und ihrer Derivirten.

Nachdem wir uns mit den blos technischen Hülfsmitteln bekannt gemacht haben, welche zur Ausführung der gewöhnlich nur angedeuteten Operation des Differenzirens dienen, liegt es uns nun ob, den Zusammenhang zu untersuchen, welcher zwischen einer beliebigen Funktion und ihren nach den gegebenen Regeln entwickelten Differenzialquotienten statt findet, und hiermit kommen wir in eine Region der Wissenschaft, in welcher weniger die Kunst, dagegen um so mehr die Metaphysik des höheren Calcüls hervortritt. Als Anhaltepunkt dienen uns hier die Betrachtungen der Einleitung, wo wir bereits eine Relation gefunden hatten, welche eine Beziehung irgend einer Funktion zu ihrem ersten Differenzialquotienten involvirt. Wir sahen nämlich, dass, wenn x und $f(x)$ die rechtwinklichen Coordinaten einer Curve und $F(x)$ die über x stehende Fläche derselben bedeuteten, die Funktionen $f(x)$ und $F(x)$ durch die folgenden Gleichungen verbunden sind

$$F(x) = \operatorname{Lim}\frac{x}{n}\left\{f(0)+f\left(\frac{x}{n}\right)+f\left(\frac{2x}{n}\right)+\ldots.+f\left(\frac{\overline{n-1}x}{n}\right)\right\}$$

und

$$f(x) = \operatorname{Lim}\frac{F(x+\delta)-F(x)}{\delta}.$$

Nach unserer jetzigen Bezeichnung giebt die letztere Formel:

$$f(x) = F'(x),$$

folglich, wenn wir dies in die vorige Gleichung substituiren,

$$F(x) = \mathrm{Lim}\frac{x}{n}\left\{F'(0) + F'\left(\frac{x}{n}\right) + F'\left(\frac{2x}{n}\right) + \ldots + F'\left(\frac{\overline{n-1}\,x}{n}\right)\right\}$$

und hiermit haben wir in der That eine Beziehung zwischen irgend einer Funktion und ihrem ersten Differenzialquotienten. Dieselbe ist übrigens nur ein spezieller Fall einer etwas allgemeineren Formel, welche sich auf folgendem rein analytischen Wege findet.

I. Da für stetig und unausgesetzt abnehmende δ

$$\mathrm{Lim}\frac{F(x+\delta) - F(x)}{\delta} = F'(x)$$

ist, so darf man für irgend ein bestimmtes δ

$$\frac{F(x+\delta) - F(x)}{\delta} = F'(x) + \varepsilon$$

setzen, wobei ε eine Grösse bezeichnet, die mit δ gleichzeitig bis zur Gränze Null abnimmt, von der wir aber sonst weiter nichts wissen und auch nicht zu wissen brauchen. Substituiren wir nun für x der Reihe nach a, $a+\delta$, $a+2\delta$, ... $a+\overline{n-1}\,\delta$, so ergiebt sich folgende Reihe von Gleichungen:

$$\frac{F(a+\delta) - F(a)}{\delta} = F'(a) + \varepsilon_1$$

$$\frac{F(a+2\delta) - F(a+\delta)}{\delta} = F'(a+\delta) + \varepsilon_2$$

$$\frac{F(a+3\delta) - F(a+2\delta)}{\delta} = F'(a+2\delta) + \varepsilon_3$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{F(a+n\delta) - F(a+\overline{n-1}\,\delta)}{\delta} = F'(a+\overline{n-1}\,\delta) + \varepsilon_n$$

und durch deren Addition

$$\frac{F(a+n\delta) - F(a)}{\delta}$$

$$= F'(a) + F'(a+\delta) + F'(a+2\delta) + \ldots + F'(a+\overline{n-1}\,\delta)$$
$$+ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \ldots + \varepsilon_n$$

und wenn wir $a + n\delta = b$ setzen:

$$\left.\begin{array}{c} F(b)-F(a) \\ =\delta\{F'(a)+F'(a+\delta)+F'(a+2\delta)+\ldots+F'(a+n-1\,\delta)\} \\ +\delta(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\ldots.+\varepsilon_n). \end{array}\right\} (1)$$

Ist nun ε' die grösste und ε'' die kleinste unter den Grössen ε_1, ε_2, ... ε_n, so muss offenbar

$$\delta(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\ldots.+\varepsilon_n)$$
$$<\delta n\varepsilon' \text{ und } >\delta n\varepsilon''$$

sein; andererseits aber war $a+n\delta=b$, folglich $n\delta=b-a$, mithin

$$\delta(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\ldots.+\varepsilon_n)$$
$$<(b-a)\varepsilon' \text{ und } >(b-a)\varepsilon''.$$

Da nun jede der Grössen ε_1, ε_2, ... ε_n bis zur Gränze Null abnimmt, sobald δ gegen die Null convergirt, so ist diess auch mit ε', ε'' und ebenso mit $(b-a)\varepsilon'$ und $(b-a)\varepsilon''$ der Fall. Hieraus folgt dann

$$\text{Lim}\,\delta(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\ldots.+\varepsilon_n)=0,$$

und wenn wir jetzt in der Gleichung (1) zur Gränze für unausgesetzt abnehmende δ übergehen, so ist

$$\left.\begin{array}{c} F(b)-F(a) \\ =\text{Lim}\,\delta\{F'(a)+F'(a+\delta)+F'(a+2\delta)+\ldots+F'(a+\overline{n-1}\,\delta\} \\ \delta=\frac{b-a}{n}. \end{array}\right\} (2)$$

Diese allgemeinere Formel, welche die frühere als speziellen Fall in sich enthält, lässt sich ebenso leicht geometrisch deuten. Wäre z. B. in Fig. 1. $OX=x$, $XY=F'(x)$, also $y=F'(x)$ die Gleichung der Curve $MPYQ$ und die Fläche $ORYX=F(x)$, so würde für $OA=a$, $OB=b$, die Fläche $ABQP$ gleich der Differenz der Flächen $OBQR$ und $OAPR$ sein und die obige Formel diente dann zur Quadratur von $ABQP=F(b)-(F(a)$. Nimmt man $a=OA=0$, so reduzirt sich die Fläche $OAPR=F(a)$ auf eine blose Gerade OR und wird also $=0$; zugleich ist dann in der Formel $\delta=\frac{b}{n}$ und folglich ergiebt sich

$$F(b)=\text{Lim}\,\frac{b}{n}\{F'(0)+F'(\frac{b}{n})+F'(\frac{2b}{n})+\ldots.+F'(\frac{\overline{n-1}\,b}{n})\},$$

was von der früheren Formel nur darin verschieden ist, dass b an der Stelle von x steht.

Setzt man in der Gleichung (1) $b = a + h$, wobei h eine ganz beliebige Grösse sein kann, so wird

$$\left.\begin{aligned} &F(a+h) - F(a) \\ &= \operatorname{Lim} \delta \{ F'(a) + F'(a+\delta) + F'(a+2\delta) + \dots + F'(a+\overline{n-1}\,\delta) \} \\ &\delta = \frac{h}{n}. \end{aligned}\right\} (3)$$

und von dieser wichtigen Formel werden wir gleich nachher Gebrauch machen.

II. Sehen wir vorerst noch einmal auf die Ableitung der Formel (2) zurück, so können wir leicht eine ebenso einfache als nützliche Bemerkung an dieselbe knüpfen.

In der Gleichung

$$\frac{F(x+\delta) - F(x)}{\delta} = F'(x) + \varepsilon$$

bedeutete ε eine Grösse, welche man so klein machen kann als man will, wenn man nur δ klein genug nimmt; man wird also ε auch so verringern können, dass $F'(x) + \varepsilon$ immer das nämliche Vorzeichen hat wie $F'(x)$ selbst. Denn wäre z. B. $F'(x)$ positiv, aber ε negativ, so würde man ε seinem absoluten Werthe nach nur kleiner als $F(x)$ zu machen haben und dann $F'(x) - \varepsilon$ noch positiv, also mit $F'(x)$ von gleichem Zeichen, ausfallen; ganz ebenso würde man verfahren, wenn $F'(x)$ negativ und ε positiv wäre. Man denke sich nun δ so klein gewählt, dass in den früheren Gleichungen die Ausdrücke

$$F'(a) + \varepsilon_1 \;,\; F'(a+\delta) + \varepsilon_2 \;,\; F'(a+2\delta) + \varepsilon_3 \;,\; \dots\; F'(\overline{a+n-1}\delta) + \varepsilon_n$$

mit ihren jedesmaligen ersten Gliedern gleiche Vorzeichen haben; wären jetzt die Grössen $F'(a)$, $F'(a+\delta)$, $F'(a+2\delta)$, ... $F'(a+\overline{n-1}\delta)$ sämmtlich positiv, so müssten wegen des stets als positiv vorausgesetzten δ auch die Differenzen

$$F(a+\delta) - F(a) \;,\; F(a+2\delta) - F(a+\delta) \;,\; F(a+3\delta) - F(a+2\delta), \dots$$
$$F(a+n\delta) - F(a+\overline{n-1}\,\delta)$$

durchgängig positiv sein und hieraus folgt:

$$F(a) < F(a+\delta) \;,\; F(a+\delta) < F(a+2\delta) \;,\; F(a+2\delta) < F(a+3\delta), \dots$$
$$F(a+\overline{n-1}\,\delta) < F(a+n\delta).$$

Sind dagegen die Grössen $F'(a)$, $F'(a+\delta)$ etc. negativ, so sind es auch die vorhingenannten Differenzen und mithin gelten die Ungleichungen

$$F(a) > F(a+\delta)\ ,\ F(a+\delta) > F(a+2\delta)\ ,\ F(a+2\delta) > F(a+3\delta), \ldots$$
$$F(a+\overline{n-1}\,\delta) > F(a+n\delta).$$

Lassen wir nun δ unausgesetzt ab und n immer zunehmen, doch so, dass immer $n\delta = b - a$ bleibt wie früher, so stellen die Grössen

$$F'(a)\ ,\ F'(a+\delta)\ ,\ F'(a+2\delta), \ldots F'(a+\overline{n-1}\,\delta)$$

und

$$F(a)\ ,\ F(a+\delta)\ ,\ F(a+2\delta), \ldots F(\overline{a+n-1}\,\delta)$$

nichts Anderes als den Verlauf der Funktionen $F'(x)$ und $F(x)$ dar, wenn in ihnen x stetig von $x = a$ bis nach $x = b$ übergeht, und wir können nun folgenden wichtigen Satz aussprechen:

> eine beliebige Funktion nimmt während eines bestimmten Intervalles beständig zu oder ab, je nachdem ihre Derivirte während des nämlichen Intervalles positiv oder negativ bleibt.

Der Differenzialquotient einer Funktion liefert also immer ein Kennzeichen, um entscheiden zu können, innerhalb welcher Intervalle die Funktion selbst wächst oder abnimmt.

III. Wir betrachten nun die Formel (3). In derselben kommen wieder die Grössen $F'(a)$, $F'(a+\delta)$, $F'(a+2\delta)$ etc. der Reihe nach vor und zugleich wird ein Uebergang zur Gränze für unausgesetzt abnehmende δ verlangt, es durchläuft also in $F'(x)$ die Veränderliche x stetig das Intervall $x = a$ bis $x = a + h$. Dabei wird nun $F'(x)$ offenbar irgendwo seinen grössten und kleinsten Werth erhalten, so dass etwa für $x = \alpha$ der Werth von $F'(\alpha)$ der grösste unter den Ausdrücken $F'(a)$, $F'(a+\delta)$, $F'(a+2\delta)$ etc. und ähnlich für $x = \beta$ der Werth von $F'(\beta)$ der kleinste von allen ist. Setzen wir daher in no. (3) für jedes Glied der Reihe das zu grosse $F'(\alpha)$ oder zu kleine $F'(\beta)$, so wird offenbar

$$F(a+h) - F(a) < \delta n F'(\alpha) \text{ d. i. } < hF'(\alpha)$$
$$F(a+h) - F(a) > \delta n F'(\beta) \text{ d. i. } > hF'(\beta)$$

oder es ist auch

$$F(a+h) - F(a) - hF'(\alpha) \text{ negativ}$$
$$F(a+h) - F(a) - hF'(\beta) \text{ positiv.}$$

Diess lässt sich auch in folgender Form darstellen. Wenn in den Ausdrucke

$$F(a+h)-F(a)-hF'(x)$$

x das Intervall $x=a$ bis $x=a+h$ durchläuft, so finden sich innerhalb des letzteren zwei Werthe α und β, von denen der eine ihn negativ und der andere positiv macht. Wenn nun aber $F'(x)$ eine stetige Funktion von x ist, wenigstens innerhalb des Intervalles $x=a$ bis $x=a+h$, so ändert sich auch der ganze obige Ausdruck continuirlich und kann demnach nur dadurch vom Negativen ins Positive übergegangen sein, dass er alle Zwischenstufen durchlaufen hat. Es existirt folglich ein gewisser Werth ξ von x, für welchen

$$F(a+h)-F(a)-hF'(\xi)=0$$

oder

$$F(a+h)-F(a)=hF'(\xi)$$

ist. Da aber ξ innerhalb des Intervalles a bis $a+h$ liegt, also bei positiven h, $a+h>\xi>a$, und bei negativen h, $a+h<\xi<a$ ist, so können wir $\xi=a+\lambda h$ setzen, wo λ einen positiven ächten Bruch, oder schärfer, eine positive die Gränzen 0 und 1 nicht überschreitende Grösse bezeichnet. So haben wir denn für $1 \geqq \lambda \geqq 0$

$$F(a+h)-F(a)=hF'(a+\lambda h) \tag{4}$$

oder

$$F(a+h)=F(a)+hF'(a+\lambda h) \tag{5}$$

Man kann dieser Gleichung auch eine geometrische Bedeutung abgewinnen, die so einfach ist, dass sie fast ans Triviale streift. Ist nämlich wieder $y=F'(x)$ die Gleichung der Curve MPQ (fig. 10) und $F(x)$ ihre über der Abscisse x stehende Fläche, so ist für $OA=a$, $AB=h$, die Fläche $ABQP=OBQM-OAPM=F(a+h)-F(a)$. Wenn nun andererseits US die grösste auf der Strecke AB stehende Ordinate (das Maximum von $F'(x)$) und VT die kleinste Ordinate (das Minimum von $F'(x)$) ist, so erhellt augenblicklich, dass das Rechteck aus AB und US mehr als die Fläche $ABQP$, und das Rechteck aus AB und VT weniger als dieselbe beträgt. Hieraus folgt, dass es eine Ordinate LK der Art geben müsse, dass die Fläche $ABQP$ gleich dem Rechtecke aus AB und LK, also

$$F(a+h)-F(a)=AB.LK=h.LK$$

ist. Wir haben aber $LK=F'(OL)=F'(OA+AL)$, und wenn wir den Bruch $\frac{AL}{AB}=\lambda$ setzen, $AL=\lambda.AB=\lambda h$ und folglich $LK=$

$F'(OA+\lambda h) = F'(a+\lambda h)$. Durch diese Substitution kommen wir auch geometrischerseits auf die Gleichung (4) zurück. — Diese Schlüsse gelten aber nicht mehr, wenn die Curve *MPSTQ* innerhalb des Intervalles von P bis Q unendlich gross wird, oder keinen zusammenhängenden Zug bildet, d. h. wenn $F'(x)$ während des Intervalles $x=a$ bis $x=a+h$ unendlich oder unstetig wird.

§ 27.

Erweiterung der gefundenen Relationen.

Denken wir uns für zwei verschiedene Funktionen $\Phi(x)$ und $\Psi(x)$ die Gleichung (3) des vorigen Paragraphen hingeschrieben, indem wir uns F einmal durch Φ und dann durch Ψ ersetzt denken, so findet sich durch Division sehr leicht

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\Phi(a+h)-\Phi(a)}{\Psi(a+h)-\Psi(a)} \\ &= \text{Lim}\,\frac{\Phi'(a)+\Phi'(a+\delta)+\Phi'(a+2\delta)+\ldots+\Phi'(a+\overline{n-1}\,\delta)}{\Psi'(a)+\Psi'(a+\delta)+\Psi'(a+2\delta)+\ldots+\Psi'(a+\overline{n-1}\,\delta)}\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

Nun giebt es aber folgenden Satz *): der Quotient zweier Summen:

---

*) Ist nämlich G der grösste und K der kleinste unter den Quotienten

$$\frac{A_0}{B_0},\ \frac{A_1}{B_1},\ \frac{A_2}{B_2},\ \ldots\ \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}};$$

so ist

$$\frac{A_0}{B_0} \leqq G \text{ und } \geqq K$$

$$\frac{A_1}{B_1} \leqq G \text{ und } \geqq K$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{A_{n-1}}{B_{n-1}} \leqq G \text{ und } \geqq K$$

und unter diesen Beziehungen kommt nur eine Gleichung vor. Aus denselben folgt

$$\begin{aligned} A_0 &\leqq B_0 G \text{ und } \geqq B_0 K \\ A_1 &\leqq B_1 G \text{ und } \geqq B_1 K \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{n-1} &\leqq B_{n-1} G \text{ und } \geqq B_{n-1} K \end{aligned}$$

und durch Addition

$$\frac{A_0+A_1+A_2+\ldots+A_{n-1}}{B_0+B_1+B_2+\ldots+B_{n-1}}$$

liegt seinem absoluten Werthe nach zwischen dem grössten und klein sten der partiellen Quotienten

$$\frac{A_0}{B_0},\ \frac{A_1}{B_1},\ \frac{A_2}{B_2},\ldots\frac{A_{n-1}}{B_{n-1}},$$

wobei ebenfalls nur die absoluten Werthe in Frage kommen. Wenden wir diess auf den in no. (3) vorkommenden Quotienten an, so folgt, dass derselbe zwischen der grössten und kleinsten unter den Grössen

$$\frac{\Phi'(a)}{\Psi'(a)},\ \frac{\Phi'(a+\delta)}{\Psi'(a+\delta)},\ \frac{\Phi'(a+2\delta)}{\Psi'(a+2\delta)},\ldots\frac{\Phi'(a+\overline{n-1}\,\delta)}{\Psi'(a+\overline{n-1}\,\delta)}$$

enthalten sein muss. Je kleiner nun $\delta=\frac{h}{n}$ ist, desto genauer stellen diese Grössen den Verlauf des Quotienten $\frac{\Phi'(x)}{\Psi'(x)}$ dar, wenn man darin x das Intervall a bis $a+h$ stetig durchlaufen lässt; da aber in no. (1) δ als unausgesetzt bis zur Gränze Null abnehmend gedacht wird, so folgt jetzt, dass der Quotient

$$\frac{\Phi(a+h)-\Phi(a)}{\Psi(a+h)-\Psi(a)}$$

zwischen dem Maximum und Minimum von $\frac{\Phi'(x)}{\Psi'(x)}$ enthalten ist, wenn man x von a bis $a+h$ gehen lässt. Tritt dieses Maximum etwa für $x=\alpha$ und das Minimum für $x=\beta$ ein, so ist

$$\frac{\Phi(a+h)-\Phi(a)}{\Psi(a+h)-\Psi(a)}-\frac{\Phi'(a)}{\Psi'(a)}\ \text{negativ}$$

und

$$\frac{\Phi(a+h)-\Phi(a)}{\Psi(a+h)-\Psi(a)}-\frac{\Phi'(\beta)}{\Phi'(\beta)}\ \text{positiv},$$

$$A_0+A_1+A_2+\ldots+A_{n-1}$$
$$<(B_0+B_1+B_2+\ldots+B_{n-1})G$$
$$\text{und} > (B_0+B_1+B_2+\ldots+B_{n-1})K.$$

Mithin ist durch Division

$$G>\frac{A_0+A_1+A_2+A_{n-1}}{B_0+B_1+B_1+B_{n-1}}>K$$

w. z. b. w.

d. h. mit anderen Worten: der Ausdruck

$$\frac{\Phi(a+h)-\Phi(a)}{\Psi(a+h)-\Psi(a)}-\frac{\Phi'(x)}{\Psi'(x)}$$

ändert sein Vorzeichen, wenn man x das Intervall $x=a$ bis $x=a+h$ durchgehen lässt. Vorausgesetzt nun, dass der Quotient $\frac{\Phi'(x)}{\Psi'(x)}$, den wir kurz $f(x)$ nennen wollen, eine wenigstens innerhalb jenes Intervalles stetige Funktion von x bildet, so folgt aus dem Vorigen, dass es einen Werth $x=\xi$ geben müsse, für welchen der obige Ausdruck sich annullirt. Da aber ξ nicht ausserhalb der Gränzen a und $a+h$ liegen kann, so können wir $\xi=a+\lambda h$ setzen, wo $1\geq\lambda\geq 0$ ist; es ergiebt sich dann:

$$\frac{\Phi(a+h)-\Phi(a)}{\Psi(a+h)-\Psi(a)}-f(a+\lambda h)=0$$

oder, vermöge der Bedeutung von $f(x)$,

$$\frac{\Phi(a+h)-\Phi(a)}{\Psi(a+h)-\Psi(a)}=\frac{\Phi'(a+\lambda h)}{\Psi'(a+\lambda h)},\quad 1\geq\lambda\geq 0 \qquad (2)$$

Wir haben aber noch die Bedingungen nachzusehen, unter welchen $f(x)$ eine stetige Funktion ist, wenigstens während des Intervalles $x=a$ bis $x=a+h$. Das Criterium für die Continuität einer Funktion $f(x)$ überhaupt besteht nun darin, dass die Differenz

$$f(x-\delta)-f(x+\delta)$$

für unendlich abnehmende δ sich der Gränze Null nähert, wie man durch sehr einfache Betrachtungen leicht finden wird *). In unserem Falle ist nun

---

*) In fig. 11a. z. B. sei $y=f(x)$ die Gleichung der Curve $RUPV$ und $f(x)$ eine stetige Funktion. Für $OM=x$, $MS=MT=\delta$ ist dann $SU=f(x-\delta)$, $TV=f(x+\delta)$ und

$$f(x-\delta)-f(x+\delta)=VU'.$$

Aus der Betrachtung der Figur ergiebt sich auf der Stelle, dass für unausgesetzt abnehmende δ die Differenz VU' sich bis zur Gränze Null verringert. Ist dagegen in fig. 11b. die Funktion $f(x)$ an der Stelle M unstetig, so ändert sie sich sprungweis, und zu $OM=x$ als Abscisse gehören zwei Ordinaten MP und MQ, von denen jene die vorhergehende Reihe von Ordinaten beschliesst und diese eine neue anfängt. Es ist dann wieder

$$f(x-\delta)-f(x+\delta)=VU',$$

$$f(x-\delta)-f(x+\delta)=\frac{\Phi'(x-\delta)}{\Psi'(x-\delta)}-\frac{\Phi'(x+\delta)}{\Psi'(x+\delta)}. \qquad (3)$$

Sind nun $\Phi'(x)$ und $\Psi'(x)$ selbst stetige Funktionen, so haben wir

$$\operatorname{Lim}\frac{\Phi'(x-\delta)}{\Psi'(x-\delta)}=\operatorname{Lim}\frac{\Phi'(x+\delta)}{\Psi'(x+\delta)}=\frac{\Phi'(x)}{\Psi'(x)}$$

und folglich

$$\operatorname{Lim}\{f(x-\delta)-f(x+\delta)\}=0,$$

wobei jedoch stillschweigend vorausgesetzt wird, dass das Minuszeichen in (3) nicht durch einen Zeichenwechsel in ein Pluszeichen, also die Differenz nicht in eine Summe umgeschlagen ist. Dieser Fall muss noch besonders betrachtet werden. Aendert nun erstlich $\Phi'(x)$ an der Stelle $x=u$ sein Zeichen, so dass $\Phi'(u-\delta)$ positiv $\Phi'(u+\delta)$ negativ ist, so wird

$$\operatorname{Lim}\{f(u-\delta)-f(u+\delta)\}=\operatorname{Lim}\left\{\frac{\Phi'(u-\delta)}{\Psi'(u-\delta)}+\frac{\Phi'(u+\delta)}{\Psi'(u+\delta)}\right\}$$
$$=2\frac{\Phi'(u)}{\Psi'(u)}.$$

Da wir aber $\Phi'(x)$ als stetige Funktion voraussetzten, so muss an der Stelle u, wo sie ihr Vorzeichen wechselt, $\Phi'(u)=0$ sein, woraus

$$\operatorname{Lim}\{f(u-\delta)-f(u+\delta)\}=0$$

folgt. Der Zeichenwechsel von $\Phi'(x)$ bringt demnach keine Unstetigkeit in die Funktion $f(x)$. Aendert dagegen $\Psi'(x)$ sein Zeichen an der Stelle $x=v$, so ist ähnlich wie vorhin

---

aber für unendlich abnehmende δ ist Lim $VU^t = PQ$, also Lim $\{f(x-\delta) - f(x+\delta)\}$ von der Null verschieden.

Man kann dieses Criterium auch anders ausdrücken; es ist nämlich identisch

$$\frac{f(x-\delta)-f(x)}{(-\delta)}+\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}=\frac{f(x+\delta)-f(x-\delta)}{\delta};$$

folglich, wenn man zur Gränze übergeht,

$$f'(x)+f'(x)=\text{einer endlichen Grösse},$$

wenn die Funktion $f(x)$ an der Stelle x stetig, und $=\infty$, wenn sie daselbst unstetig ist. So lange also der Differenzialquotient einer Funktion endlich bleibt, ändert sich die letztere continuirlich.

$$\text{Lim}\{f(v-\delta)-f(v+\delta)\}=\text{Lim}\left\{\frac{\Phi'(v-\delta)}{\Psi'(v-\delta)}+\frac{\Phi'(v+\delta)}{\Psi'(v+\delta)}\right\}$$
$$=2\frac{\Phi'(v)}{\Psi'(v)},$$

und da $\Psi'(x)$ ebenfalls als stetige Funktion vorausgesetzt wurde, so muss an der Stelle v des Zeichenwechsels $\Psi'(v)=0$ sein, woraus dann

$$\text{Lim}\{f(v-\delta)-f(v+\delta)\}=\infty$$

folgt, also $f(x)$ unstetig wird. Zur Continuität des Quotienten

$$f(x)=\frac{\Phi'(x)}{\Psi'(x)}$$

gehört also, dass die Funktionen $\Phi'(x)$ und $\Psi'(x)$ selbst von $x=a$ bis $x=a+h$ stetig sind und dass die letztere während dieses Intervalles ihr Vorzeichen nicht ändere. Diess sind die Bedingungen für die Gültigkeit der Gleichung (2). Es giebt übrigens noch eine Determination für die genannte Formel. Die Ableitung derselben basirt nämlich auf der Voraussetzung, dass die Funktion $f(x)$ einen grössten und kleinsten Werth annehme, wenn man x von a bis $a+h$ gehen lässt, und diese Voraussetzung ist offenbar in dem Falle unrichtig, wo $f(x)$ innerhalb jenes Intervalles unbegränzt wächst oder abnimmt, weil es dann weder ein Maximum noch ein Minimum giebt. Wir müssen daher noch die Bedingung hinzufügen, dass $f(x)$ während des Intervalles $x=a$ bis $x=a+h$ weder unendlich zu- noch abnehme, welche immer erfüllt ist, sobald $\Phi'(x)$ und $\Psi'(x)$ innerhalb jenes Intervalles endlich bleiben.

Da durch die Stetigkeit und Endlichkeit der derivirten Funktionen auch immer die der ursprünglichen Funktionen $\Phi(x)$ und $\Psi(x)$ mitbedingt ist (beiläufig gesagt, ein Satz, den man nicht umkehren darf), und gleiches Vorzeichen von $\Psi'(x)$ entweder beständiges Wachsthum oder fortwährende Abnahme von $\Psi(x)$ anzeigt, so können wir alles Bisherige in folgenden Satz zusammenfassen:

Bleiben die Funktionen $\Phi(x)$ und $\Psi(x)$ nebst ihren ersten Differenzialquotienten endlich und stetig während des Intervalles $x=a$ bis $x=a+h$, und nimmt ferner $\Psi(x)$ innerhalb dieses Intervalles entweder blos zu oder blos ab, so ist

$$\frac{\Phi(a+h)-\Phi(a)}{\Psi(a+h)-\Psi(a)}=\frac{\Phi'(a+\lambda h)}{\Psi'(a+\lambda h)},\ 1\geqq\lambda\geqq 0. \qquad (4)$$

Construiren wir in Fig. 12 zwei Curven MPQ und NST, deren Gleichungen $y=\Phi'(x)$ und $y=\Psi'(x)$ sind und nehmen $OA=a$, $AB=h$, also $OB=a+h$, so sind die Flächen $ABQP=\Phi(a+h)-\Phi(a)$ und $ABTS=\Psi(a+h)-\Psi(a)$. Für $AL=a+\lambda h$ haben wir ferner $LJ=\Phi'(a+\lambda h)$, $LK=\Psi'(a+\lambda h)$ und folglich bedeutet die Gleichung (4) geometrisch, dass sich die Flächen $ABQP$ und $ABTS$ zu einander verhalten wie die Ordinaten LJ und LK.

Man kann den Satz, der sich in der Gleichung (4) ausspricht, leicht beliebig erweitern. Haben nämlich $\Phi'(x)$, $\Psi'(x)$ und ebenso $\Phi''(x)$, $\Psi''(x)$ stetigen Verlauf von $x=a$ bis $x=a+k$ und $\Psi''(x)$ keinen Zeichenwechsel (so dass also $\Psi'(x)$ entweder nur zu oder nur abnimmt), so ist ähnlich wie in (4):

$$\frac{\Phi'(a+k)-\Phi'(a)}{\Psi'(a+k)-\Psi'(a)}=\frac{\Phi''(a+\lambda' k)}{\Psi''(a+\lambda' k)}, \quad 1\geqq\lambda'\geqq 0$$

und wenn man $k=\lambda h$, $\lambda\lambda'=\lambda_2$ setzt,

$$\frac{\Phi'(a+\lambda h)-\Phi'(a)}{\Psi'(a+\lambda h)-\Psi'(a)}=\frac{\Phi''(a+\lambda_2 h)}{\Psi''(a+\lambda_2 h)}, \quad 1\geqq\lambda_2\geqq 0.$$

Auf ganz die nämliche Weise könnte man wieder die folgende Gleichung ableiten:

$$\frac{\Phi''(a+\lambda_2 h)-\Phi''(a)}{\Psi''(a+\lambda_2 h)-\Psi''(a)}=\frac{\Phi'''(a+\lambda_3 h)}{\Psi'''(a+\lambda_3 h)}, \quad 1\geqq\lambda_3\geqq 0.$$

Man übersieht leicht wie, sich dieses Spiel fortsetzen lässt und dass man damit zu folgendem Satze gelangt:

Wenn die Funktionen $\Phi(x)$ und $\Psi(x)$ nebst den folgenden Differenzialquotienten derselben

$$\Phi'(x)\,,\ \Phi''(x)\,,\ \Phi'''(x)\,,\ \ldots\ \Phi^{(n-1)}(x)\,,\ \Phi^{(n)}(x)$$
$$\Psi'(x)\,,\ \Psi''(x)\,,\ \Psi'''(x)\,,\ \ldots\ \Psi^{(n-1)}(x)\,,\ \Psi^{(n)}(x)$$

innerhalb des Intervalles $x=a$ bis $x=a+h$ stetig und endlich bleiben, und wenn ferner die Differenzialquotienten von $\Psi'(x)$ während des nämlichen Intervalles ihre jedesmaligen Vorzeichen nicht wechseln, so gelten die Gleichungen

$$\frac{\Phi(a+h)-\Phi(a)}{\Psi(a+h)-\Psi(a)}=\frac{\Phi'(a+\lambda_1 h)}{\Psi'(a+\lambda_1 h)}$$

$$\frac{\Phi'(a+\lambda_1 h)-\Phi'(a)}{\Psi'(a+\lambda_1 h)-\Psi'(a)}=\frac{\Phi''(a+\lambda_2 h)}{\Psi''(a+\lambda_2 h)}$$

$$\frac{\Phi''(a+\lambda_2 h)-\Phi''(a)}{\Psi''(a+\lambda_2 h)-\Psi''(a)}=\frac{\Phi'''(a+\lambda_3 h)}{\Psi'''(a+\lambda_3 h)}$$

. . . .

$$\frac{\Phi^{(n-1)}(a+\lambda_{n-1} h)-\Phi^{(n-1)}(a)}{\Psi^{(n-1)}(a+\lambda_{n-1} h)-\Psi^{(n-1)}(a)}=\frac{\Phi^{(n)}(a+\lambda_n h)}{\Psi^{(n)}(a+\lambda_n h)},$$

in denen λ_1 , λ_2 , λ_3 , ... λ_n Grössen bedeuteten, welche die Gränzen 0 und $+1$ nicht überschreiten.

Sind die Differenzialquotienten von $\Phi(x)$ und $\Psi(x)$ so beschaffen, dass gleichzeitig

$$\Phi(a)=\Phi''(a)=\Phi'''(a)\,\ldots=\Phi^{(n-1)}(a)=0$$
$$\Psi'(a)=\Psi''(a)=\Psi'''(a)\,\ldots=\Psi^{(n-1)}(a)=0$$

ist, so wird die rechte Seite jeder der obigen Gleichungen identisch mit der linken der nachfolgenden Gleichung und wir haben dann folgendes sehr wichtige Theorem:

Wenn die Funktionen $\Phi(x)$ und $\Psi(x)$ nebst ihren Differenzialquotienten bis zum $n$ten inclusive innerhalb des Intervalles $x=a$ bis $x=a+h$ endlich und stetig sind, wenn ferner die Differenzialquotienten von $\Psi(x)$ während desselben Intervalles ihre jedesmaligen Vorzeichen nicht wechseln, und wenn endlich beide Reihen von Differenzialquotienten mit Ausschluss der $n$ten für $x=a$ verschwinden, so gilt die Gleichung

$$\frac{\Phi(a+h)-\Phi(a)}{\Psi(a+h)-\Psi(a)}=\frac{\Phi^{(n)}(a+\lambda_n h)}{\Psi^{(n)}(a+\lambda_n h)}, \qquad (5)$$

worin λ_n eine die Gränzen 0 und $+1$ nicht übersteigende Grösse bezeichnet.

Ein gutes Beispiel hierzu bildet die Annahme $\Psi(x)=(x-a)^n$; es erfüllt dieselbe alle der Funktion $\Psi(x)$ auferlegten Bedingungen und giebt

$$\frac{\Phi(a+h)-\Phi(a)}{h^n}=\frac{\Phi^{(n)}(a+\lambda_n h)}{1.2.3\ldots n},$$

oder wenn wir F für Φ schreiben:

$$F(a+h) = F(a) + \frac{h^n}{1.2\ldots n} F^{(n)}(a+\lambda_n h) \qquad (6)$$

wobei nun die Funktionen $F(x)$, $F'(x)$, $F''(x) \ldots F^{(n)}(x)$ innerhalb des Intervalles $x=a$ bis $x=a+h$ stetig und endlich sein und mit Ausnahme der ersten und letzten für $x=a$ verschwinden müssen.

Wäre $F(x)$ eine von den vielen Funktionen, die nebst ihren Differenzialquotienten für $x=0$ sich annulliren, so kann man $a=0$ nehmend, eine oft sehr brauchbare Formel erhalten, nämlich f für F schreibend:

$$f(h) = \frac{h^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(\lambda_n h), \qquad (7)$$

von der wir in Cap. VIII eine wichtige Anwendung machen werden.

Zweite Abtheilung.

Anwendungen der Differenzialrechnung.

Cap. VI. Die unbestimmt scheinenden Werthe mancher Funktionen.

§. 28.

Die vieldeutigen Symbole $\frac{0}{0}$ und $\frac{\infty}{\infty}$.

Es kommt bekanntlich häufig vor, dass die Werthe mancher Funktionen sich in speziellen Fällen unter einer der vieldeutigen Formen $\frac{0}{0}$ und $\frac{\infty}{\infty}$ präsentiren, aus welchen man ihre wahren Werthe nicht erkennen kann. Diess ist z. B. immer der Fall, wenn man einen Ausdruck von der Form

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

zu betrachten hat, in welchem $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ sich für einen speziellen Werth $x=a$ zugleich annulliren oder beide über alle Gränze hinaus wachsen, sobald sich x der Gränze a nähert. Die hierbei sich von selbst aufdrängende Frage nach den wahren Bedeutungen solcher unbestimmten Symbole lässt sich nun in jedem speziellen Falle leicht mit Hülfe der Differenzialrechnung beantworten.

I. Nach dem Theoreme (4) im vorigen Paragraphen ist unter der Voraussetzung, dass die Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ für $x=a$ sich gleichzeitig annulliren und in der Nachbarschaft von a stetig sind,

$$\frac{\varphi(a+h)}{\psi(a+h)}=\frac{\varphi'(a+\lambda h)}{\psi'(a+\lambda h)},$$

mithin für $k=0$

$$\frac{\varphi(a)}{\psi(a)}=\frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}. \qquad (1)$$

Dieser Satz dient unmittelbar zur Lösung unserer Aufgabe; denn wenn $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ sich beide für $x=a$ annulliren, so erscheint der Quotient $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ für $x=a$ unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$; verschwinden nun $\varphi'(x)$ und $\psi'(x)$ nicht ebenfalls gleichzeitig für $x=a$, so giebt der Quotient $\frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}$ den wahren Werth des Quotienten $\frac{\varphi(a)}{\psi(a)}$ an. Man kann diess auch unabhängig von dem Früheren auf folgende Weise sehen. Für

$$f(x)=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

ist identisch

$$f(x+\delta)=\frac{\varphi(x)+\{\varphi(x+\delta)-\varphi(x)\}}{\psi(x)+\{\psi(x+\delta)-\psi(x)\}},$$

folglich für $x=a$, wo $\varphi(a)=\psi(a)=0$ ist,

$$f(a+\delta)=\frac{\varphi(a+\delta)-\varphi(a)}{\psi(a+\delta)-\psi(a)}=\frac{\dfrac{\varphi(a+\delta)-\varphi(a)}{\delta}}{\dfrac{\psi(a+\delta)-\psi(a)}{\delta}}$$

und hieraus ergiebt sich durch Uebergang zur Gränze für unendlich abnehmende δ

$$f(a), \text{ d. i. } \frac{\varphi(a)}{\psi(a)}=\frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)},$$

wie vorher. Annullirten sich die derivirten Funktionen $\varphi'(x)$ und $\psi'(x)$ ebenfalls für $x=a$, so könnte man das nämliche Theorem auf sie selbst anwenden und hätte dann

$$\frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}=\frac{\varphi''(a)}{\psi''(a)},$$

folglich

$$\frac{\varphi(a)}{\psi(a)}=\frac{\varphi''(a)}{\psi''(a)}.$$

Wäre wieder $\varphi''(a)=\psi''(a)=0$, so erhält man durch Anwendung des nämlichen Verfahrens

$$\frac{\varphi(a)}{\psi(a)}=\frac{\varphi'''(a)}{\psi'''(a)}.$$

Man übersieht leicht, dass man durch Fortsetzung dieser Schlüsse zu folgendem allgemeinen Theoreme gelangt:

Wenn die Funktionen

$$\varphi(x)\ ,\ \varphi'(x)\ ,\ \varphi''(x)\ ,\ \ldots\ \varphi^{(n-1)}(x),$$
$$\psi(x)\ ,\ \psi'(x)\ ,\ \psi''(x)\ ,\ \ldots\ \psi^{(n-1)}(x)$$

sämmtlich für $x=a$ verschwinden, dagegen $\varphi^{(n)}(x)$ und $\psi^{(n)}(x)$ die ersten unter den derivirten Funktionen sind, welche sich für $x=a$ nicht gleichzeitig annulliren, so findet man den wahren Werth des Quotienten $\frac{\varphi(a)}{\psi(a)}$ dadurch, dass man in den $n$ten Differenzialquotienten $\varphi^{(n)}(x)$ und $\psi^{(n)}(x)$ x in a übergehen lässt und die Grösse des Quotienten $\frac{\varphi^{(n)}(a)}{\psi^{(n)}(a)}$ bestimmt.

Beispiele. Für $\varphi(x)=a^\mu-x^\mu$, $\psi(x)=a-x$ ist $\varphi'(x)=-\mu x^{\mu-1}$, $\psi'(x)=-1$; da diese Derivirten für $x=a$ nicht gleichzeitig verschwinden, so ist der wahre Werth von

$$\frac{a^\mu-x^\mu}{a-x}$$

für $x=a$ der Grösse $\mu a^{\mu-1}$ gleich oder, was das Nämliche bedeutet, $\mu a^{\mu-1}$ ist der Gränzwerth, dem sich jener Quotient nähert, wenn man x an a heranrücken lässt.

Für die Bestimmung des Werthes von

$$\frac{x-\sin x}{x^3}$$

in dem Falle $x=0$ hat man $\varphi'(x)=1-\cos x$, $\psi'(x)=3x^2$; da diese Funktionen sich wieder für $x=0$ annulliren, so gehen wir zu den zweiten Differenzialquotienten $\varphi''(x)=\sin x$, $\psi''(x)=6x$. Das Verschwinden beider für $x=0$ nöthigt uns, noch einen Schritt weiter zu thun, wobei wir $\varphi'''(x)=\cos x$, $\psi'''(x)=6$ bekommen. Aus diesen folgt nun für $x=0$, dass $\frac{1}{6}$ der wahre Werth unseres Quotienten für $x=0$ ist.

II. Sind die Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ der Art, dass sie ins Unendliche hinaus wachsen, wenn x sich der Grösse a nähert, so kann man den Gränzwerth des Quotienten

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\infty}{\infty}$$

leicht mittelst der vorigen Regeln finden. Sobald nämlich $\varphi(x)$ und

$\psi(x)$ ins Unbegränzte wachsen, nähern sich die Funktionen $\frac{1}{\varphi(x)}$ und $\frac{1}{\psi(x)}$ der Gränze Null. Da nun

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\frac{1}{\psi(x)}}{\frac{1}{\varphi(x)}}$$

ist, so kommt die Aufgabe auf die vorige zurück, wenn man in der letzteren $\frac{1}{\varphi(x)}$ und $\frac{1}{\psi(x)}$ für $\psi(x)$ und $\varphi(x)$, folglich $-\frac{\varphi'(x)}{[\varphi(x)]^2}$ und $-\frac{\psi'(x)}{[\psi(x)]^2}$ an die Stelle von $\psi'(x)$ und $\varphi'(x)$ setzt. Es ist dann

$$\frac{\varphi(a)}{\psi(a)} = \frac{\frac{\psi'(a)}{[\psi(a)]^2}}{\frac{\varphi'(a)}{[\varphi(a)]^2}} = \left[\frac{\varphi(a)}{\psi(a)}\right]^2 \frac{\psi'(a)}{\varphi'(a)},$$

woraus folgt:

$$\frac{\varphi(a)}{\psi(a)} = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}. \tag{2}$$

Wenn also $\varphi(x)$ und $\psi(x)$, statt wie früher für $x = a$ zu ver schwinden, ins Unendliche wachsen, so bleibt doch die Regel noch ganz die nämliche.

Z. B. die Funktionen $\varphi(x) = l\left(\frac{1}{x}\right)$ und $\psi(x) = \cot x$ nehmen ins Unbegränzte zu, sobald x in Null übergeht. Man hat aber $\varphi'(x) = -\frac{1}{x}$, $\psi'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$, folglich

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{\sin^2 x}{x}.$$

Da dieser Quotient für $x = 0$ in $\frac{0}{0}$ übergeht, so wenden wir die Regel I. an und haben

$$\frac{\varphi''(x)}{\psi''(x)} = \frac{2 \sin x \cos x}{1}.$$

Für $x = 0$ werden hier $\varphi''(x)$ und $\psi''(x)$ nicht gleichzeitig Null und folglich ist nun für $x = 0$

$$\frac{l\left(\frac{1}{x}\right)}{\cot x} = \frac{2 \sin x \cos x}{1} = 0. \tag{3}$$

Setzen wir $\varphi(x)=x^\mu$, $\psi(x)=e^x$, so nehmen für unendlich wachsende x auch $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ ins Unbegränzte zu; es ist aber $\varphi'(x)=\mu x^{\mu-1}$, $\psi'(x)=e^x$, hat man aber $\mu>1$, so werden hier wieder $\varphi'(x)$ und $\psi'(x)$ gleichzeitig unendlich und dann muss man noch einmal differenziren, woraus $\varphi''(x)=\mu(\mu-1)x^{\mu-2}$, $\psi''(x)=e^x$ folgt. Für $\mu>2$ würde man hier noch einmal differenziren müssen. Ist überhaupt n die erste ganze Zahl $>\mu$, so hat man

$$\left.\begin{array}{l}\varphi'(x)=\varphi''(x)\ldots\ldots=\varphi^{(n-1)}(x)\\ \psi'(x)=\psi''(x)\ldots\ldots=\psi^{(n-1)}(x)\end{array}\right\}=\infty$$

für $x=\infty$, dagegen aber

$$\frac{\varphi^{(n)}(x)}{\psi^{(n)}(x)}=\frac{\mu(\mu-1)\ldots.(\mu-n+1)}{x^{n-\mu}e^x},$$

wo nun $n>\mu$ ist. Daraus folgt jetzt $\operatorname{Lim}\frac{\varphi^{(n)}(x)}{\psi^{(n)}(x)}=0$, mithin auch

$$\operatorname{Lim}\frac{x^\mu}{e^x}=0, \tag{4}$$

was auch μ sein möge.

§. 29.

Die vieldeutigen Symbole $0.\infty$, 0^0, ∞^0 *u. dergl.*

I. Sind zwei Funktionen $\varphi(x)$ und $\chi(x)$ so beschaffen, dass $\varphi(x)$ sich der Gränze Null nähert, dagegen $\chi(x)$ ins Unendliche hinaus wächst, so bald man x dem bestimmten Werthe a näher und näher kommen lässt, so kann sich das Produkt $\varphi(x)\chi(x)$ einer endlichen Gränze nähern, die sich aber im Allgemeinen hinter der vieldeutigen Form $0.\infty$ versteckt. Der wahre Sinn derselben lässt sich leicht finden, wenn man entweder $\frac{1}{\chi(x)}=\psi(x)$ setzt, wodurch

$$\varphi(x)\chi(x)=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

wird, worin sich $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ für $x=a$ gleichzeitig annulliren und folglich die Regel I. in §. 28. anwendbar wird, oder dadurch, dass man $\frac{1}{\varphi(x)}=\omega(x)$ nimmt, was

$$\varphi(x)\chi(x)=\frac{\chi(x)}{\omega(x)}$$

giebt, wobei $\chi(x)$ und $\omega(x)$ ins Unendliche hinauswachsen, sobald x in a übergeht und mithin die Regel II. des vorigen Paragraphen brauchbar ist.

Als Beispiel für das erste Verfahren diene die Annahme $\varphi(x) = l(2-\frac{x}{a})$, $\chi(x)=\tan\frac{\pi x}{2a}$, wobei für $x=a$ $\varphi(a)=0$, $\chi(a)=\infty$ wird. Es ist dann $\psi(x)=\cot\frac{\pi x}{2a}$ und mithin

$$\varphi(x)\chi(x)=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{l(2-\frac{x}{a})}{\cot\frac{\pi x}{2a}},$$

folglich nach der angegebenen Regel

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}=\frac{-\frac{1}{2a-x}}{-\frac{\pi}{2a}\cdot\frac{1}{\sin^2\frac{\pi x}{2a}}}=\frac{2a}{x}\cdot\frac{\sin^2\frac{\pi x}{2a}}{2a-x},$$

woraus folgt, dass für $x=a$ der wahre Werth von

$$l(2-\frac{x}{a})\tan\frac{\pi x}{2a}=\frac{2}{\pi} \tag{1}$$

ist. Die zweite Methode dagegen lässt sich z. B. auf das Produkt $x^\mu lx$ anwenden, worin für $x=0$, $x^\mu=0$ wird (μ nämlich als positiv vorausgesetzt) und lx unbegränzt wächst. Es ist hier $\omega(x)=x^{-\mu}$, folglich

$$\varphi(x)\chi(x)=\frac{\chi(x)}{\omega(x)}=\frac{lx}{x^{-\mu}}$$

und nach der in §. 28. II. angegebenen Regel:

$$\frac{\chi'(x)}{\omega'(x)}=\frac{x^{-1}}{-\mu x^{-\mu-1}}=-\frac{x^\mu}{\mu}.$$

und hieraus folgt, dass für $x=0$ bei positiven μ

$$x^\mu lx=0 \tag{2}$$

wird.

II. Wenn sich endlich ein Ausdruck wie $[f(x)]^{\varphi(x)}$ für $x=a$ unter eine der vieldeutigen Formen 0^0, ∞^0, 1^∞ stellt, so berücksichtige man, dass immer

$$[f(x)]^{\varphi(x)}=e^{lf(x)\cdot\varphi(x)}$$

ist und setze jetzt $lf(x) = \chi(x)$, so handelt es sich jetzt blos noch um die Bestimmung der Gränze, welcher sich der Exponent $\varphi(x)\chi(x)$ für $x = a$ nähert und diese Bestimmung kann nach der vorhin entwickelten Regel immer gegeben werden. So ist z. B. für $x = 0$ der Ausdruck x^x vieldeutig $= 0^0$; man hat aber

$$x^x = e^{xlx},$$

und da xlx nach dem Vorigen für $x = 0$ verschwindet, so wird

$$x^x = 1 \text{ für } x = 0. \tag{3}$$

Für $x = 0$ wird ferner

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = \infty^0$$

Man hat aber

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = e^{-lx \sin x},$$

und da sich nach dem Vorigen $lx \sin x = 0$ findet, wenn $x = 0$, so wird

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = 1 \text{ für } x = 0. \tag{4}$$

Ganz ähnlich stellt sich der Ausdruck

$$\left(2 - \frac{x}{a}\right)^{\tan \frac{\pi x}{2a}}$$

für $x = a$ unter die Form 1^∞; dagegen ist

$$\left(2 - \frac{x}{a}\right)^{\tan \frac{\pi x}{2a}} = e^{l\left(2 - \frac{x}{a}\right) \tan \frac{\pi x}{2a}} = e^{\frac{2}{\pi}}, \tag{5}$$

wenn man die Gleichung (1) berücksichtigt.

Cap. VII. Maxima und Minima.

§. 30.

Maxima und Minima der Funktionen einer Variabelen.

Wenn eine Funktion einer Veränderlichen innerhalb des einen Intervalles immer zu-, während eines folgenden Intervalles dagegen

abnimmt, dann wieder wächst und so das Spiel mit Wachsthum und Abnahme forttreibt, so muss es in ihrem Verlaufe, vorausgesetzt, dass derselbe ein stetiger ist, gewisse Punkte geben, an welchen Uebergänge von dem Einen zum Andern eintreten. Diese Stellen lassen sich leicht schärfer bezeichnen; denn wenn die Werthe der Funktion im Steigen begriffen waren und dann wieder ins Fallen geriethen, so muss derjenige Werth, bei welchem das Erstere aufhörte und das Andere anfing, offenbar grösser sein als seine Nachbarn auf beiden Seiten, d. h. er muss ein sogenanntes Maximum bilden; wenn dagegen die Werthe der Funktion erst fielen und dann zu steigen anfingen, so ist derjenige Werth, welcher den Uebergang von Abnahme zu Wachsthum vermittelt, gewiss kleiner als seine beiderseitigen Nachbarn und stellt demnach ein Minimum dar. Es versteht sich nach dieser Erklärung von selbst, dass hier unter Maximum und Minimum nicht gerade der absolut grösste oder kleinste Werth der Funktion, den dieselbe während ihres ganzen Verlaufes annimmt, verstanden wird, sondern dass es sich hier nur um gewisse Wendepunkte in dem Verlaufe der Funktion handelt; hat die letztere nur einen solchen, so geht dann allerdings das relative Maximum oder Minimum in das absolute über.

Wir wissen aber aus §. 26. I., dass der Differenzialquotient einer Funktion das Criterium für ihr Wachsthum oder ihre Abnahme ist, und zwar so, dass $F(x)$ von $x=a-\delta$ bis $x=a$ wächst, wenn $F'(x)$ innerhalb jenes Intervalles positiv bleibt, dass dagegen $F(x)$ von $x=a$ bis $x=a+\delta$ abnimmt, wenn für diese Strecke $F'(x)$ negativ ist. Soll nun beides zugleich statt finden, also $F(x)$ für $x=a$ ein Maximum werden, so muss $F'(x)$ an der Stelle $x=a$ aus dem Positiven ins Negative übergehen; dies kann aber bei stetigem Verlaufe von $F'(x)$ nur mittelst des Durchganges durch Null geschehen, bei unstetigem $F'(x)$ (wie z. B. bei $\frac{1}{a-x}$) auch durch Ueberspringen aus $+\infty$ nach $-\infty$. Es muss demnach $F'(a)=0$ oder $F'(a)=\infty$, d. i. a eine Wurzel der Gleichung

$$F'(x)=0, \text{ oder } F'(x)=\infty \qquad (1)$$

sein. Ganz die nämlichen Betrachtungen passen auch auf die Voraussetzung, dass $F(x)$ von $x=a-\delta$ bis $x=a$ ab- und von $x=a$ bis $x=a+\delta$ zunehme, in welchem Falle $F(a)$ ein Minimum bildet. Man findet demnach diejenigen Werthe von x, die $F(x)$ zu einem Maximum oder Minimum machen, dadurch, dass man den Differenzialquotienten

von $F(x)$ der Null oder dem ∞ gleich setzt und die so entspringende Gleichung (1) nach x auflöst.

Um nun aber zu entscheiden, welche von den aus no. (1) für x gefundenen Werthen zu einem Maximum oder Minimum führen, verfahren wir wie folgt. Ist a irgend einer von diesen zu untersuchenden Werthen, so substituiren wir denselben an die Stelle von x in den folgenden (höheren) Differenzialquotienten von $F(x)$ und erhalten so die Reihe

$$F''(a)\ ,\ F'''(a)\ ,\ F^{IV}(a), \ldots.$$

Hier kann es sich zufällig treffen, dass eine oder mehrere dieser Grössen, von der Linken zur Rechten fortgehend, sich annulliren, und um daher die Betrachtung allgemein zu halten, sei $F^{(n)}(x)$ der erste höhere Differenzialquotient, welcher für $x=a$ nicht verschwindet. Nun haben wir aber nach §. 27. no. (10) unter dieser Voraussetzung

$$F(a+h)-F(a)=\frac{h^n}{1.2\ldots n}F^{(n)}(a+\lambda_n h), \qquad (2)$$

wo man nun h immer so klein nehmen kann, dass $F^{(n)}(a+\lambda_n h)$ mit $F^{(n)}(a)$ gleiches Vorzeichen hat. Denn da $\lambda_n h < h$ ist (wegen $\lambda_n < 1$), so liegt $a+\lambda_n h$ innerhalb des Intervalles $x=a$ bis $x=a+h$, welches man wegen des beliebigen h so eng machen kann, dass die derivirte Funktion $F^{(n)}(x)$ während desselben ihr Vorzeichen nicht ändert. In Bezug auf die Gleichung (2) sind jetzt zwei Fälle zu unterscheiden, ob nämlich n ungerade oder gerade ist.

A. Für ein ungerades n hat man, wenn $F^{(n)}(x)$ positiv von $x=0$ bis $x=a+h$ ist,

$$F(a+h)-F(a)$$

positiv, also

$$F(a+h) > F(a),$$

und bei negativen h

$$F(a-h)-F(a)$$

negativ, also

$$F(a) > F(a-h),$$

mithin beides zusammengenommen

$$F(a+h) > F(a) > F(a-h),$$

und ebenso wenn $F^{(n)}(x)$ negativ von $x=a$ bis $x=a+h$ wäre:

$$F(a+h) < F(a) < F(a-h).$$

In diesem Falle bildet $F(a)$ weder ein Maximum noch ein Minimum, weil es immer zwischen $F(a+h)$ und $F(a-h)$ liegt.

B. Ist dagegen n gerade und $F^{(n)}(x)$ positiv in der Nähe von $x=a$, so wird

$$F(a+h)-F(a)$$

positiv, also

$$F(a+h) > F(a),$$

und bei negativen h, wo jetzt h^n sein Vorzeichen nicht ändert,

$$F(a-h)-F(a)$$

positiv, also

$$F(a-h) > F(a),$$

mithin beides zusammengenommen

$$F(a-h) > F(a) < F(a+h),$$

woraus erhellt, dass jetzt $F(a)$ ein Minimum ist. Wäre $F^{(n)}(x)$ in der Nachbarschaft von $x=a$ negativ, so hätte man

$$F(a+h)-F(a)$$

negativ, also

$$F(a) > F(a+h),$$

und ebenso bei negativen h

$$F(a-h)-F(a)$$

negativ, also

$$F(a) > F(a-h),$$

mithin zusammen

$$F(a-h) < F(a) > F(a+h),$$

woraus sich ergiebt, dass $F(a)$ in diesem Falle ein Maximum ist.

Fassen wir das Bisherige zusammen, so können wir folgende Regel aussprechen: wenn $F^{(n)}(x)$ der erste für $x=a$ nicht verschwindende Differenzialquotient und n ungerader Ordnung ist, so bildet $F(x)$ für $x=a$ weder ein Maximum noch ein Minimum; ist dagegen n gerade, so macht der Werth $x=a$ die Funktion $F(x)$ zu einem Maximum oder Minimum, je nachdem $F^{(n)}(a)$ negativ oder positiv ausfällt. Mittelst dieses Satzes lässt sich nun leicht entscheiden, welche von den Wurzeln der Gleichung $F'(x)=0$ oder $F'(x)=\infty$, unter denen alle zu einem Maximum oder Minimum führenden Werthe enthalten sind, ein Grösstes

oder Kleinstes bilden oder nicht. Um diess an einem Beispiele zu zeigen, sei

$$F(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 7$$

die zu untersuchende Funktion. Man findet sogleich

$$F'(x) = 3(x^2 - 6x + 8)$$
$$F''(x) = 6(x - 3)$$
$$F'''(x) = 6$$
$$F^{IV}(x) = F^{V}(x) = \ldots = 0.$$

Aus $F'(x) = 0$ ergiebt sich

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

und die Wurzeln dieser Gleichung sind $x = 2$, $x = 4$. Da $F''(x)$ für keinen dieser beiden Werthe verschwindet, so entscheidet dieser Differenzialquotient, es wird nämlich

$F''(x)$ negativ für $x = 2$, also $F(x)$ ein Maximum,
$F''(x)$ positiv „ $x = 4$, „ $F(x)$ „ Minimum.

Hiernach ist der Lauf der Funktion leicht zu übersehen; während des Intervalles $x = 0$ bis $x = 2$ wächst sie beständig von $F(0) = -7$ auf $F(2) = 13$, nimmt von da ab während des Intervalles $x = 2$ bis $x = 4$, an dessen Ende sie das Minimum $F(4) = 9$ erreicht und wächst von da ins Unendliche hinaus. Auf der negativen Seite nimmt sie unbegränzt ab, wie man leicht aus $F'(x)$ erkennen kann. Nach diesen Andeutungen würde es nun keine Schwierigkeiten haben, eine graphische Darstellung der Curve zu geben, welche durch die Gleichung $y = F(x)$ repräsentirt wird.

§ 31.

Geometrische Beispiele zum vorigen Paragraphen.

Es möge hier die Beantwortung einiger geometrischen Fragen als Beispiele für die Lehren des §. 30. folgen, wobei das relative Maximum mit dem absoluten zusammenfällt.

I. Welcher ist, seinem kubischen Inhalte nach, der grösste Cylinder, der sich aus einem gegebenen Kegel herausschneiden lässt?

Sei in Fig. 13 ABC der gegebene Kegel, der Radius OA der Grundfläche $= a$, die Höhe $OC = b$ und $OX = x$ der Halbmesser der Grund-

fläche des Cylinders, der zu einem Maximum werden soll, die Höhe XY desselben $=y$. Der Inhalt des Cylinders ist nun nach bekannten stereometrischen Lehren $=\pi x^2 y$, wo sich aber y durch x ausdrücken lässt, weil

$$AO : OC = AX : XY$$

oder

$$a : b = a - x : y$$

ist, woraus folgt, dass der Inhalt des Cylinders, der $F(x)$ heissen möge, durch die Gleichung

$$F(x) = \frac{b\pi}{a}(ax^2 - x^3) \qquad (1)$$

ausgedrückt wird. Hier ist nun weiter

$$F'(x) = \frac{b\pi}{a}(2ax - 3x^2)$$

$$F''(x) = \frac{b\pi}{a}(2a - 6x)$$

und aus $F'(x) = 0$ folgen für x zwei Werthe:

$$x = 0 \text{ und } x = \frac{2}{3}a. \qquad (2)$$

$F''(x)$ verschwindet für keinen von beiden und wird positiv für den ersten, negativ für den zweiten und also entspricht $x = 0$ einem Minimum, $x = \frac{2}{3}a$ einem Maximum. Dieser grösste Cylinder hat den Inhalt $F(\frac{2}{3}a) = \frac{4}{27}a^2 b\pi$ und kann nun wegen der Bestimmung von OX leicht construirt werden.

II. Welcher von den verschiedenen Cylindern, die sich aus einem gegebenen Kegel schneiden lassen, hat den grössten Mantel?

Da x der Radius der Grundfläche des fraglichen Cylinders, y seine Höhe ist, so wird die Grösse des Mantels durch $2xy\pi$ ausgedrückt, oder wegen des Werthes von y durch

$$\frac{2\pi b}{a}(ax - x^2) = F(x). \qquad (3)$$

Hieraus folgt durch zweimalige Differenziation:

$$F'(x) = \frac{2\pi b}{a}(a - 2x)\,,\; F''(x) = -\frac{4\pi b}{a}$$

und aus $F'(x)=0$

$$x=\frac{1}{2}a. \tag{4}$$

Da $F''(x)$ jedenfalls negativ bleibt, was auch x sein möge, so entspricht der gefundene Werth einem Maximum.

III. Wie bestimmt man denjenigen aus einem Kegel zu schneidenden Cylinder, der die grösste Oberfläche hat?

Da die Oberfläche eines Cylinders aus dem Mantel und der doppelt genommenen Grundfläche besteht, so ist für unseren Fall

$$F(x)=\frac{2\pi b}{a}(ax-x^2)+2x^2\pi \tag{5}$$

folglich

$$F'(x)=2\pi(b-\frac{2b}{a}x+2x),$$

$$F''(x)=2\pi(-\frac{2b}{a}+2)=\frac{4\pi}{a}(a-b).$$

Aus der letzten Gleichung erhellt, dass nur dann ein Maximum eintreten kann, wenn $a-b$ negativ, d. h. $b>a$ ist und unter dieser Voraussetzung giebt $F'(x)=0$ für x den Werth

$$x=\frac{ab}{2(b-a)}, \; b>a. \tag{6}$$

Wäre dagegen $b<a$, so würde x negativ ausfallen, und diess bedeutet hier eine Unmöglichkeit, weil man x blos das Intervall $x=0$ bis $x=a$ durchlaufen zu lassen braucht, um alle nach den Bedingungen der Aufgabe überhaupt möglichen Cylinder zu bekommen. Dass in der That in dem Falle $b<a$ kein Maximum vorkommen kann, sieht man auch aus der Formel für $F'(x)$, wenn man sie in folgender Gestalt darstellt:

$$F'(x)=2\pi\{b+2(1-\frac{b}{a})x\}.$$

Da nun $b<a$ sein soll, so ist $\frac{b}{a}$ ein ächter Bruch, mithin $1-\frac{b}{a}$ positiv und folglich bleibt der Differenzialquotient $F'(x)$ selbst stets positiv, wenn x von 0 bis a geht. Die Oberflächen der successiven Cylinder wachsen also beständig von Null an, wo der entsprechende Cylinder eine Gerade (die Kegelachse) ist, bis $a^2\pi$, wo der Cylinder in eine Ebene (die Kegelbasis) übergegangen ist.

IV. Wie findet man den an Inhalt grössten Cylinder, der sich aus einer gegebenen Kugel heraus schneiden lässt?

Sei in Fig. 14. der Kugelhalbmesser $OY=r$, ferner $X=x$ und $XY=y$, so wird der Inhalt des Cylinders, der $2x$ zur Höhe und y zum Basisradius hat, durch $2xy^2\pi$ ausgedrückt; da andererseits $y^2=r^2-x^2$ ist, so haben wir

$$2\pi(r^2x-x^3)=F(x) \tag{7}$$

zu einem Maximum zu machen. Es ergiebt sich hierzu

$$F'(x)=2\pi(r^2-3x^2),$$
$$F''(x)=-2\pi.6x,$$

und folglich aus $F'(x)=0$

$$x=\pm\frac{r}{\sqrt{3}}. \tag{8}$$

Der positive Werth entspricht hier einem Maximum, der negative kann nicht in Betracht kommen, weil man alle der Aufgabe nach möglichen Cylinder schon dadurch erhält, dass man x von $x=0$ bis $x=r$ gehen lässt.

V. Welcher von allen aus einer Kugel möglichen Cylindern hat den grössten Mantel?

Nach der vorigen Bezeichnung ist $4\pi xy$ die Grösse des Mantels, also wegen $y=\sqrt{r^2-x^2}$ haben wir

$$F(x)=4\pi x\sqrt{r^2-x^2} \tag{9}$$

zu einem Maximum zu machen. Es findet sich nun leicht

$$F'(x)=4\pi\frac{r^2-2x^2}{\sqrt{r^2-x^2}},$$
$$F''(x)=4\pi\frac{x(2x^2-3r^2)}{\sqrt{(r^2-x^2)^3}}.$$

Aus $F'(x)=0$ erhält man

$$x=\pm\frac{r}{\sqrt{2}}, \tag{10}$$

wo aber nur das obere Zeichen Sinn hat und zu einem Maximum führt, wie man aus der Formel für $F''(x)$ ersieht. Da $F'(x)$ eine gebrochene Funktion bildet, deren Nenner Null werden kann, so dürfen wir auch noch $F'(x)=\infty=\frac{1}{0}$ setzen, woraus $x=r$ folgt. Dieser Werth ent-

spricht einem Minimum, weil der Cylinder sich dann auf einen Durchmesser der Kugel reduzirt.

VI. Unter welchen Umständen wird die Oberfläche eines aus einer gegebenen Kugel geschnittenen Cylinders ein Maximum?

Addiren wir zum Mantel des Cylinders seine Grundfläche ($=y^2\pi$) doppelt genommen, so ist jetzt

$$F(x)=4\pi x\sqrt{r^2-x^2}+2\pi(r^2-x^2), \qquad (11)$$

$$F'(x)=4\pi\frac{r^2-2x^2}{\sqrt{r^2-x^2}}-4\pi x,$$

$$F''(x)=4\pi\frac{x(2x^2-3r^2)}{\sqrt{(r^2-x^2)^3}}-4\pi.$$

Aus $F'(x)$ resultirt die Gleichung

$$r^2-2x^2=x\sqrt{r^2-x^2}, \qquad (12)$$

aus welcher durch Rationalmachen die folgende hervorgeht:

$$(r^2-2x^2)^2=x^2(r^2-x^2), \qquad (13)$$

und durch Auflösung derselben ergeben sich für x die 4 in folgendem Ausdruck enthaltenen Werthe:

$$x=\pm r\sqrt{\frac{1}{2}(1\pm\frac{1}{\sqrt{5}})}. \qquad (14)$$

Nun sind aber nicht alle Wurzeln der Gleichung (13) auch Wurzeln der Gleichung (12), weil diese in Bezug auf x von niedrigerer Dimension ist als jene; substituiren wir nämlich die Werthe von x in no. (12), so muss

$$r^2-2r^2\frac{1}{2}(1\pm\frac{1}{\sqrt{5}})$$
$$=\left(\pm r\sqrt{\frac{1}{2}(1\pm\frac{1}{\sqrt{5}})}\right)\left(r\sqrt{\frac{1}{2}(1\mp\frac{1}{\sqrt{5}})}\right)$$

sein, wobei der zweite Faktor rechts kein doppeltes Vorzeichen hat, weil das Radikal in (12) wesentlich positiv ist. Die vorstehende Gleichung giebt nun bei weiterer Reduktion

$$\mp\frac{1}{\sqrt{5}}=\pm\sqrt{\frac{1}{4}(1-\frac{1}{5})}=\pm\frac{1}{\sqrt{5}},$$

wobei sich die Vorzeichen nicht auf einander beziehen. Man sieht hier-

aus, dass, wenn nicht ein Widerspruch eintreten soll, die beiden in (14) vorkommenden Radikale mit entgegengesetzten Zeichen genommen werden müssen, dass also für x blos die beiden Werthe

$$x = +r\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)}, \qquad (15)$$

$$x = -r\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)}$$

als Auflösungen der Gleichung (12) übrig bleiben. Dagegen sind die Werthe

$$x = +r\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)}, \qquad (16)$$

$$x = -r\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)}$$

zwar Wurzeln der Gleichung (13), aber nicht der Gleichung (12). Da wir nun für x keinen negativen Werth zulassen können, so ist der in (15) verzeichnete Ausdruck die Auflösung unserer Aufgabe, die Summe des Cylindermantels und der doppelten Basis zu einem Maximum zu machen, dagegen bildet der Ausdruck in (16) die Auflösung der Aufgabe, welche entsteht, wenn man statt Summe sagt Differenz.

VII. Welcher ist, seinem Volumen nach, der grösste Kegel, den man aus einer gegebenen Kugel schneiden kann?

Sei in fig. 15. der Kugelhalbmesser $AO = OY = r$, $OX = x$, $XY = y$, so ist der Inhalt des Kegels $= \frac{1}{3}(r+x)y^2\pi$ und weil $y^2 = r^2 - x^2$ ist,

$$F(x) = \frac{\pi}{3}(r+x)(r^2 - x^2). \qquad (17)$$

Hieraus findet man leicht

$$F'(x) = \frac{\pi}{3}(r^2 - 2rx - 3x^2),$$

$$F''(x) = -\frac{2\pi}{3}(r + 3x)$$

und aus $F'(x)$ ergeben sich für x die beiden Werthe

$$x = -r, \quad x = \frac{1}{3}r \qquad (18)$$

von denen der erste einem Minimum entspricht, weil sich dann der Kegel auf einen blosen Punkt A reduzirt, und der zweite ein Maximum giebt.

VIII. Welcher von den Kegeln, die man aus einer gegebenen Kugel schneiden kann, hat den grössten Mantel?

Da nach der vorigen Bezeichnung der Basishalbmesser des fraglichen Kegels $= y$ und seine Höhe $= r + x$ ist, so haben wir vermöge einer bekannten stereometrischen Regel für seinen Mantel $\pi y \sqrt{(r+x)^2+y^2}$, oder wegen des Werthes von y

$$F(x) = \pi \sqrt{r^2-x^2} \sqrt{2r^2+2rx},$$

und wenn man berücksichtigt, dass $r^2 - x^2 = (r + x)(r - x)$, $2r^2+2rx=2r(r+x)$ ist,

$$F(x) = \pi \sqrt{2r}\,(r+x) \sqrt{r-x}. \tag{19}$$

Hieraus findet man

$$F'(x) = \pi \sqrt{2r}\; \frac{r-3x}{2\sqrt{r-x}}$$

$$F''(x) = \pi \sqrt{2r}\; \frac{3x-5r}{4\sqrt{(r-x)^3}}$$

also, wenn $F'(x) = 0$ genommen wird

$$x = \frac{1}{3}\,r.$$

Wir können demnach mit Berücksichtigung von VII sagen: der seinem Inhalte nach grösste Kegel, den man aus einer Kugel herausnehmen kann, hat auch den grössten Mantel.

IX. Welcher von den Kegeln, die man aus einer gegebenen Kugel schneiden kann, hat die grösste Oberfläche?

Da die ganze Oberfläche gleich dem Mantel plus der Basis ist, welche letztere durch $y^2\pi=(r^2-x^2)\pi$ ausgedrückt wird, so haben wir

$$F(x) = \pi \{ \sqrt{2r}\,(r-x) \sqrt{r-x} + r^2 - x^2 \}$$

$$F'(x) = \pi \left\{ \sqrt{2r}\,\frac{r-3x}{2\sqrt{r-x}} - 2x \right\}$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(r-3x)\sqrt{2r} - 4x\sqrt{r-x}}{\sqrt{r-x}}$$

$$F''(x) = \pi \left\{ \sqrt{2r}\,\frac{3x-5r}{4\sqrt{(r-x)^3}} - 2 \right\}$$

Aus $F'(x)$ ergiebt sich für x die Gleichung

$$(r-3x)\sqrt{2r} = 4x\sqrt{r-x}, \qquad (21)$$

die nach beiderseitiger Quadrirung in

$$16x^3 + 2x^2r - 12xr^2 + 2r^3 = 0$$

oder

$$8x^3 + x^2r - 6xr^2 + r^3 = 0 \qquad (22)$$

übergeht. Nehmen wir

$$x = \frac{r}{\xi} \qquad (23)$$

wo nun ξ eine neue Unbekannte bezeichnet, so geht die vorige Gleichung in die folgende über

$$\xi^3 - 6\xi^2 + \xi + 8 = 0,$$

so dass also ξ eine absolute Zahl ist.

Um nun die vorstehende cubische Gleichung aufzulösen, braucht man blos zu bemerken, dass $\xi = -1$ die linke Seite auf Null reduzirt, mithin $\xi = -1$ eine Wurzel derselben und $\xi + 1$ ein Divisor der ganzen Funktion links ist. In der That kann man statt der obigen Gleichung die folgende schreiben:

$$(\xi+1)(\xi^2 - 7\xi + 8) = 0,$$

und wenn man auch den zweiten Faktor $= 0$ setzt, so ergiebt sich durch Auflösung dieser quadratischen Gleichung

$$\xi = \frac{7 \mp \sqrt{17}}{2}$$

und diese zwei Werthe sind die beiden anderen Wurzeln der cubischen Gleichung. Es giebt demnach vermöge der Formel (23) für x drei Werthe

$$x_1 = -r$$

$$x_2 = \frac{2}{7-\sqrt{17}}\,r = (0{,}6951941)\,r$$

$$x_3 = \frac{2}{7+\sqrt{17}}\,r = (0{,}1798063)\,r.$$

Diese drei Wurzeln der Gleichung (22) sind aber nicht sämmtlich Wurzeln von (21); x_1 nämlich macht die linke Seite dieser Gleichung positiv, die rechte negativ, x_2 die linke negativ, die rechte positiv und folglich sind x_1 und x_2 nicht Wurzeln der Gleichung (21), sondern vielmehr der folgenden:

$$(r-3x)\sqrt{2r} = -4x\sqrt{r-x}.$$

Dagegen befriedigt der Werth x_3 die Gleichung (21) und macht zugleich $F''(x)$ negativ, also $F(x)$ zu einem Maximum, daher ist $x=x_3$ oder

$$x = \frac{2r}{7+\sqrt{17}} \tag{24}$$

die Auflösung unserer Aufgabe.

§ 32.

Maxima und Minima der Funktionen mehrerer von einander unabhängigen Variabelen.

Die Definition, welche für das Maximum oder Minimum der Funktionen mit nur einer Veränderlichen gegeben worden ist, lässt sich mit der grössten Leichtigkeit auch auf Funktionen mehrerer Variabelen ausdehnen, wobei wir zunächst voraussetzen, dass diese letzteren von einander völlig unabhängig sind. Ist nämlich $F(x,y,z\ldots)$ eine solche Funktion, die wir im Folgenden der Kürze wegen oft blos mit F bezeichnen wollen, so kann es unter Umständen ein zusammengehöriges System von Werthen $x=a$, $y=b$, $z=c$ u. s. f. geben, welches den Werth von F grösser oder kleiner macht als alle Nachbarwerthe, d. h. diejenigen, welche entstehen, wenn man x von $a-h$ bis $a+h$, y von $b-k$ bis $b+k$, z von $c-l$ bis $c+l$ etc. gehen lässt, wobei h, k, $l\ldots$ beliebig kleine Grössen bezeichnen; im ersten Falle würde der Werth von F ein Maximum, im zweiten ein Minimum sein, und es kommt nun darauf an, das System von Werthen $x=a$, $y=b$, $z=c$ etc. zu finden, welches ein solches erzeugt.

Diese Untersuchung lässt sich durch einen sehr einfachen Gedanken auf den Fall reduziren, dass die zu betrachtende Funktion nur eine Variabele enthält. Denken wir uns nämlich, es enthalte die Funktion F ausser den schon genannten Veränderlichen x, y, $z,\ldots$ noch eine, die ω heissen möge, und es seien x, y, $z,\ldots$ gewisse Funktionen derselben, etwa $x=\varphi(\omega)$, $y=\psi(\omega)$, $z=\chi(\omega)$ etc., so können wir uns alle Veränderungen von x, y, $z,\ldots$ durch Veränderungen von ω allein hervorgerufen denken. Wenn es für den ersten Augenblick scheinen möchte, als sei hierdurch die Voraussetzung der

völligen Unabhängigkeit der Grössen x, y, z etc. von einander aufgehoben worden, in so fern wenigstens ein mittelbarer Zusammenhang zwischen ihnen durch das hinzugesetzte ω statuirt zu sein scheint, so ist dagegen zu bedenken, dass die Natur der Funktionen φ, ψ, χ,... durchaus unbestimmt gelassen worden ist und also sogar mit dem Werthe von ω sich selbst wieder ändern darf, wodurch offenbar die Allgemeinheit der Voraussetzung wieder restituirt wird. So wie nun aber $x=\varphi(\omega)$, $y=\psi(\omega)$, $z=\chi(\omega)$ etc. war, so müssen die speziellen Werthe a, b, c, ... entsprechend Funktionen eines speziellen Werthes von ω etwa α sein; könnte man daher diesen Spezialwerth α finden, für welchen die Funktion F, als Funktion von ω allein betrachtet, ihr Maximum oder Minimum erreichte, so würden sich hieraus sogleich a, b, c, ... mit Hülfe der Gleichungen $a=\varphi(\alpha)$, $b=\psi(\alpha)$, $c=\chi(\alpha)$ etc. ergeben. Dieser Gedanke lässt sich in folgender Weise ausführen.

Soll die Funktion F für einen gewissen Werth ihrer Variablen ω ihr Maximum oder Minimum erreichen, so muss derselbe eine Wurzel der Gleichung

$$\frac{dF}{d\omega}=0$$

sein, und hier können wir der linken Seite die Form geben

$$\frac{dF}{d\omega}=\left(\frac{dF}{dx}\right)\left(\frac{dx}{d\omega}\right)+\left(\frac{dF}{dy}\right)\left(\frac{dy}{d\omega}\right)+\left(\frac{dF}{dz}\right)\left(\frac{dz}{d\omega}\right)+\dots \quad (1)$$

worin die Differenzialquotienten rechts partielle sind; soll nun aber dieser Ausdruck Null werden, so kann diess, weil $\frac{dx}{d\omega}=\varphi'(\omega)$, $\frac{dy}{d\omega}=\psi'(\omega)$, $\frac{dz}{d\omega}=\chi'(\omega)$ etc. ganz beliebige Grössen sind, nur dann geschehen, wenn einzeln für sich die Coeffizienten dieser Grössen verschwinden, also die Gleichungen

$$\left(\frac{dF}{dx}\right)=0\ ,\ \left(\frac{dF}{dy}\right)=0\ ,\ \left(\frac{dF}{dz}\right)=0\ ,\ \text{etc.} \quad (2)$$

gleichzeitig statt finden. Da dieser Gleichungen so viele sind als Variable x, y, z etc., so lassen sich hieraus die unbekannten Werthe a, b, c, ... derselben eliminiren, womit dann die erste Hälfte der Aufgabe gelöst ist. Es bleibt nun noch die Diskussion übrig, welche von den gefundenen Werthen einem Maximum und welche einem Minimum ent-

sprechen. Hierzu ist es nöthig, die höheren Differenzialquotienten der Gleichung (1) aufzusuchen, wobei wir zur Abkürzung

$$\frac{dx}{d\omega} = Dx\,, \frac{dy}{d\omega} = Dy\,, \frac{dz}{d\omega} = Dz, \ldots \qquad (3)$$

setzen wollen; zugleich macht sich aber, wenn der Calcül nicht zu verwickelt werden soll, eine Unterscheidung der Fälle nöthig, in denen die Funktion F zwei oder drei oder noch mehr Veränderliche enthält.

I. Ist F eine Funktion von x und y, so ergiebt sich leicht durch Differenziation der Gleichung

$$\frac{dF}{d\omega} = \frac{dF}{dx} Dx + \frac{dF}{dy} Dy$$

die folgende:

$$\frac{d^2F}{d\omega^2} = \frac{dF}{dx} \cdot \frac{dDx}{d\omega} + \frac{d^2F}{dx^2} \cdot \frac{dx}{d\omega} Dx + \frac{dF}{dy} \cdot \frac{dDy}{d\omega} + \frac{d^2F}{dx\,dy} \cdot \frac{dx}{d\omega} Dy$$
$$+ \frac{dF}{dx} \cdot \frac{dDy}{d\omega} + \frac{d^2F}{dy\,dx} \cdot \frac{dy}{d\omega} Dx + \frac{dF}{dy} \cdot \frac{dDy}{d\omega} + \frac{d^2F}{dy^2} \cdot \frac{dy}{d\omega} Dy.$$

Substituiren wir hier für x und y die aus no. (2) gefundenen Werthe, so fallen die mit $\frac{dF}{dx}$ und $\frac{dF}{dy}$ multiplizirten Glieder weg und wegen der in (3) eingeführten Bezeichnung ist dann

$$\frac{d^2F}{d\omega^2} = \frac{d^2F}{dx^2}(Dx)^2 + 2\frac{d^2F}{dx\,dy} Dx\,Dy + \frac{d^2F}{dy^2}(Dy)^2. \qquad (4)$$

Sollen nun die gefundenen Werthe ein Maximum oder Minimum bilden, so muss der vorliegende Ausdruck entweder constant negativ oder positiv sein und zwar für alle Dx und Dy. Hierzu gehört erstlich, dass man nicht gleichzeitig

$$\frac{d^2F}{dx^2} = \frac{d^2F}{dx\,dy} = \frac{d^2F}{dy^2} = 0 \qquad (5)$$

hat; und wenn diese Bedingung erfüllt ist, so muss der Ausdruck in (4) oder der folgende

$$\frac{d^2F}{dx^2}\left(\frac{Dx}{Dy}\right)^2 + 2\frac{d^2F}{dx\,dy}\left(\frac{Dx}{Dy}\right) + \frac{d^2F}{dy^2} \qquad (6)$$

immer gleiches Vorzeichen behalten, von dem dann noch zu entscheiden wäre, in welchen Fällen es das Plus- und in welchen das Minuszeichen ist. Wenn aber ein Ausdruck von der Form

$$\alpha s^2 + 2\beta s + \gamma$$

für alle reellen s sein Vorzeichen behalten soll, so müssen die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$\alpha s^2 + 2\beta s + \gamma = 0$$

imaginär oder

$$\beta^2 - \alpha\gamma < 0$$

sein; denn wenn eine reelle Wurzel $s = s_1$ existirte, so würde die Funktion $\alpha s^2 + 2\beta s + \gamma$ ihr Zeichen wechseln, sobald man s das Intervall $s_1 - \delta$ bis $s_1 + \delta$ durchlaufen liesse, wo δ eine beliebig kleine Grösse bezeichnet. Wenden wir diess auf den Ausdruck in (6) an, so ergiebt sich die Ungleichung

$$\left(\frac{d^2F}{dx\,dy}\right)^2 - \frac{d^2F}{dx^2} \cdot \frac{d^2F}{dy^2} < 0 \tag{7}$$

als Bedingung dafür, dass die Funktion in (6) oder die rechte Seite in (5) immer das nämliche Vorzeichen hat. Die vorstehende Bedingung vertritt zugleich die in no. (5) ausgesprochene, weil, wenn sie erfüllt ist, nicht alle in (5) stehenden Grössen gleichzeitig verschwinden können.

Wenn nun die Werthe $x = a$ und $y = b$ der Ungleichung (7) Genüge leisten, so sind offenbar

$$\frac{d^2F}{dx^2} \text{ und } \frac{d^2F}{dy^2}$$

von gleichem Vorzeichen, weil im Gegenfalle die Summe zweier positiven Grössen negativ wäre, und da nun nach dem Vorigen die rechte Seite von (4) für alle Dx und Dy das nämliche Vorzeichen behält, so kann man auch $Dy = 0$ setzen, woraus man ersieht, dass jener Ausdruck immer das nämliche Vorzeichen hat wie

$$\frac{d^2F}{dx^2}(Dx)^2 \text{ oder wie } \frac{d^2F}{dx^2},$$

also mit diesem Differenzialquotienten zugleich positiv oder negativ ist. Aus allem Diesen zusammen ergiebt sich nun das Criterium:

die aus den Gleichungen $\frac{dF}{dx} = 0$ und $\frac{dF}{dy} = 0$ abgeleiteten Werthe von x und y müssen zunächst die Bedingung

$$\left(\frac{d^2F}{dx\,dy}\right)^2 - \frac{d^2F}{dx^2} \cdot \frac{d^2F}{dy^2} < 0 \tag{8}$$

erfüllen und erzeugen das Maximum oder Minimum von $F(x,y)$, je nachdem für sie die Differenzialquotienten

$$\frac{d^2F}{dx^3} \text{ und } \frac{d^2F}{dy^2} \tag{9}$$

gleichzeitig negativ oder positiv ausfallen.

Um diess auf ein Beispiel anzuwenden, sei

$$F(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + G;$$

man findet dann sogleich

$$\frac{dF}{dx} = 2(Ax + By + D),$$

$$\frac{dF}{dy} = 2(Bx + Cy + E),$$

$$\frac{d^2F}{dx^2} = 2A, \quad \frac{d^2F}{dx\,dy} = 2B, \quad \frac{d^2F}{dy^2} = 2C.$$

Aus den Gleichungen $\frac{dF}{dx} = 0$, $\frac{dF}{dy} = 0$ ergeben sich für x und y die beiden Werthe

$$x = \frac{CD - BE}{B^2 - AC}, \quad y = \frac{AE - BD}{B^2 - AC};$$

zunächst muss nun sein

$$B^2 - AC < 0$$

und es findet dann ein Maximum oder Minimum statt, je nachdem A und C zugleich negativ oder positiv sind.

Um auch ein Beispiel zu haben, in welchem sich der Calcül nicht vollständig hinausführen lässt, behandeln wir auch die Aufgabe: „in der Ebene eines gegebenen Dreiecks ABC einen Punkt O so zu bestimmen, dass die Summe der μten Potenzen der Entfernungen AO, BO, CO ein Minimum wird.“ Setzen wir $CO = x, BO = x, AO = x_2$, so wäre demnach Fig. 16.

$$x^\mu + x_1^\mu + x_2^\mu$$

zu einem Minimum zu machen. Wenn ferner $\angle BCO = y, \angle BCA = \gamma$ und $BC = a, AC = b$, so ist

$$x_1 = \sqrt{a^2 + x^2 - 2ax\cos y},$$

$$x_2 = \sqrt{b^2 + x^2 - 2bx\cos(\gamma - y)}.$$

Nun ergiebt sich für $F(x,y) = x^\mu + x_1^\mu + x_2^\mu$:

$$\frac{dF}{dx}=\mu x^{\mu-1}+\mu x_1{}^{\mu-1}\left(\frac{dx_1}{dx}\right)+\mu x_2{}^{\mu-1}\left(\frac{dx_2}{dx}\right),$$
$$\frac{dF}{dy}=\mu x_1{}^{\mu-1}\left(\frac{dx_1}{dy}\right)+\mu x_2{}^{\mu-1}\left(\frac{dx_2}{dy}\right),$$

d. i. vermöge der Werthe von x_1 und x_2:

$$\frac{dF}{dx}=\mu x^{\mu-1}+\mu\frac{x-a\cos y}{x_1}x_1{}^{\mu-1}+\mu\frac{x-b\cos(\gamma-y)}{x_2}x_2{}^{\mu-1},$$
$$\frac{dF}{dy}=\mu\frac{ax\sin y}{x_1}x_1{}^{\mu-1}-\mu\frac{bx\sin(\gamma-y)}{x_2}x_2{}^{\mu-1}.$$

Setzt man beide Differenzialquotienten $=0$, so erhält man für x und y die beiden Gleichungen:

$$x^{\mu-1}=\frac{a\cos y-x}{x_1}x_1{}^{\mu-1}+\frac{b\cos(\gamma-y)-x}{x_2}x_2{}^{\mu-1},$$
$$0=\frac{a\sin y}{x_1}x_1{}^{\mu-1}+\frac{b\sin(\gamma-y)}{x_2}x_2{}^{\mu-1}.$$

An eine Elimination von x und y aus denselben ist nun bei der Willkührlichkeit des Exponenten μ gar nicht zu denken, dagegen können wir aber aus diesen Gleichungen zwei andere sehr einfache ableiten. Setzen wir nämlich $\angle BOC'=\varphi$, $\angle AOC'=\psi$ und betrachten die rechtwinklichen Dreiecke CBP und CAQ, so ergiebt sich, dass die vorigen Gleichungen die folgende Form annehmen:

$$x^{\mu-1}=x_1{}^{\mu-1}\cos\varphi+x_2{}^{\mu-1}\cos\psi,$$
$$0=x_1{}^{\mu-1}\sin\varphi-x_2{}^{\mu-1}\sin\psi.$$

Eliminiren wir hieraus einmal $x_2{}^{\mu-1}$ und einmal $x_1{}^{\mu-1}$, so wird

$$x^{\mu-1}\sin\psi=x_1{}^{\mu-1}\sin(\varphi+\psi),$$
$$x^{\mu-1}\sin\varphi=x_2{}^{\mu-1}\sin(\varphi+\psi);$$

und wenn wir bemerken, dass $\sin\psi=\sin AOC$, $\sin\varphi=\sin BOC$, $\varphi+\psi=AOB$ ist,

$$x^{\mu-1}\sin AOC=x_1{}^{\mu-1}\sin AOB,$$
$$x^{\mu-1}\sin BOC=x_2{}^{\mu-1}\sin AOB.$$

Symmetrischer gestaltet sich diess, wenn wir statt x, x_1, x_2 schreiben ζ, η, ξ und $\angle AOB=(\xi,\eta)$, $\angle AOC=(\xi,\zeta)$, $\angle BOC=(\eta,\zeta)$ setzen. Es ist dann

$$\zeta^{\mu-1}\sin(\xi,\zeta)=\eta^{\mu-1}\sin(\xi,\eta),$$
$$\zeta^{\mu-1}\sin(\eta,\zeta)=\xi^{\mu-1}\sin(\xi,\eta);$$

und diess sind die Bedingungen, mittelst deren man in jedem speziellen Falle die Werthe von ξ, η, ζ oder der von ihnen eingeschlossenen Winkel unter Beihülfe der Bestimmungsstücke des Dreiecks zu entwickeln hat. Ob diese Bestimmung zu einem Maximum oder Minimum führt, ist immer leicht zu entscheiden; denn wenn man den Punkt O nur weit genug wegrücken lässt, so kann man ξ, η, ζ grösser als jede gegebene Linie machen; für ein positives μ wächst dann auch $\xi^\mu + \eta^\mu + \zeta^\mu$ unbegränzt und folglich giebt es in diesem Falle kein Maximum, für negative μ dagegen kann man diese Summe so klein machen als man will, und dann existirt kein Minimum; es geben also jene Bedingungen ein Minimum für positive μ und ein Maximum für negative μ.

Ist $\mu = 1$, so wird $\angle(\xi, \eta) = \angle(\xi, \zeta) = \angle(\eta, \zeta) = \frac{2\pi}{3}$, wonach man den Punkt O leicht durch eine geometrische Construktion finden kann; für $\mu = 2$ ist O der Schwerpunkt des Dreiecks ABC.

Fände die erste der vorhin angegebenen Bedingungen nicht statt, verschwänden also die Differenzialquotienten

$$\frac{d^2F}{dx^2}, \frac{d^2F}{dx\,dy}, \frac{d^2F}{dy^2}$$

zugleich für die gefundenen speziellen Werthe von x und y, so würde man auch aus dem zweiten Differenzialquotienten nicht erfahren können, welche von jenen Werthen einem Maximum oder Minimum entsprechen, und sich an die weiteren Differenzialquotienten der Gleichung

$$\frac{dF}{d\omega} = \frac{dF}{dx} Dx + \frac{dF}{dy} Dy$$

halten müssen. Hier ist nun erst nöthig, dass der erste für jene speziellen Werthe nicht verschwindende Differenzialquotient gerader Ordnung sei, wenn überhaupt ein Maximum oder Minimum möglich sein soll; bezeichnen wir die Ordnung desselben mit m, wo m eine gerade Zahl bedeutet, so müssen nun alle Differenzialquotienten niedriger Ordnung

$$\frac{d^2F}{d\omega^2}, \frac{d^3F}{d\omega^2}, \ldots, \frac{d^{m-1}F}{d\omega^2}$$

verschwinden, woraus man der Reihe nach leicht ableitet:

$$\frac{d^2F}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^2F}{dx\,dy} = 0, \quad \frac{d^2F}{dy^2} = 0;$$

$$\frac{d^3F}{dx^3}=0\ ,\ \frac{d^3F}{dx^2dy}=0\ ,\ \frac{d^3F}{dx\,dy^2}=0\ ,\ \frac{d^3F}{dy^3}=0.$$

u. s. f.

Unter Berücksichtigung dieser Gleichungen nimmt $\frac{d^mF}{d\omega^m}$ die folgende Form an:

$$\frac{d^mF}{d\omega^m}=\frac{d^mF}{dx^m}(Dx)^m+\frac{m}{1}\cdot\frac{d^mF}{dx^{m-1}dy}(Dx)^{m-1}Dy$$
$$+\frac{m(m-1)}{1.2}\cdot\frac{d^mF}{dx^{m-2}dy^2}(Dx)^{m-2}(Dy)^2+\ldots.$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\frac{m}{1}\cdot\frac{d^mF}{dx\,dy^{m-1}}Dx(Dy)^{m-1}+\frac{d^mF}{dy^m}(Dy)^m,$$

wovon man sich ohne die mindeste Schwierigkeit durch wirkliche Entwickelung von $\frac{d^3F}{d\omega^3}$, $\frac{d^4F}{d\omega^4}$ etc. successiv überzeugen wird. Da der vorliegende Ausdruck, der Voraussetzung nach, sich nicht annullirt, so muss er für alle Dx und Dy immer das nämliche Vorzeichen behalten, so dass das Minuszeichen dem Maximum, das Pluszeichen dem Minimum entspräche. Soll aber der Ausdruck rechts sein Vorzeichen nicht ändern, so darf diess auch bei dem folgenden:

$$\frac{d^mF}{dx^m}\left(\frac{Dx}{Dy}\right)^m+m_1\frac{d^mF}{dx^{m-1}dy}\left(\frac{Dx}{Dy}\right)^{m-1}+m_2\frac{d^mF}{dx^{m-2}dy^2}\left(\frac{Dx}{Dy}\right)^{m-2}$$
$$+\ldots.+m_{m-1}\frac{d^mF}{dx\,dy^{m-1}}\cdot\frac{Dx}{Dy}+\frac{d^mF}{dy^m}$$

nicht der Fall sein, worin m_1, m_2 etc. (die Binomialkoeffizienten) zur Abkürzung dienen. Setzen wir die Quotienten

$$\frac{Dx}{Dy}=s\ ,\ \frac{d^mF}{dx^m}=\alpha_0\ ,\ \frac{d^mF}{dx^{m-1}dy}=\alpha_1\ ,\ \text{u. s. f.},$$

so kann der Ausdruck

$$\alpha_0 s^m+m_1\alpha_1 s^{m-1}+m_2\alpha_2 s^{m-2}+\ldots.+\alpha_m$$

für alle s nur dann sein Vorzeichen ungeändert behalten, wenn die Wurzeln der Gleichung

$$\alpha_0 s^m+m_1\alpha_1 s^{m-1}+\ldots.+m_{m-1}\alpha_{m-1}s+\alpha_m=0$$

sämmtlich imaginär sind. Diese Bedingung lässt sich aber analytisch nicht weiter reduziren, weil hierzu die allgemeine Auflösung der Gleichungen gehören würde, und man kann daher die Untersuchung nur in

speziellen Fällen weiter führen, wo dann noch zu entscheiden bleibt, ob jenes constante Vorzeichen das positive oder negative ist.

II. Ein ganz ähnliches Verfahren lässt sich in dem Falle anwenden, dass die Funktion F, deren Maximum oder Minimum aufgesucht werden soll, drei oder mehrere von einander unabhängige Veränderliche enthält. So hat man für drei Variabele

$$\frac{dF}{d\omega}=\frac{dF}{dx}Dx+\frac{dF}{dy}Dy+\frac{dF}{dz}Dz \tag{10}$$

und zur Bestimmung der ein Maximum oder Minimum erzeugenden Werthe

$$\frac{dF}{dx}=0,\ \frac{dF}{dy}=0,\ \frac{dF}{dz}=0. \tag{11}$$

Benutzt man diese Gleichungen bei der Entwickelung des zweiten Differenzialquotienten von F, so ergiebt sich

$$\begin{aligned}\frac{d^2F}{d\omega^2}=&\frac{d^2F}{dx^2}(Dx)^2+\frac{d^2F}{dy^2}(Dy)^2+\frac{d^2F}{dz^2}(Dz)^2\\&+2\frac{d^2F}{dx\,dy}Dx\,Dy+2\frac{d^2F}{dx\,dz}Dx\,Dz+z\frac{d^2F}{dy\,dz}Dy\,Dz,\end{aligned}$$

wobei zur Abkürzung die folgende Bezeichnung eintreten möge:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2F}{dx^2}=\xi,\ \frac{d^2F}{dy^2}=\eta,\ \frac{d^2F}{dz^2}=\zeta\\&\frac{d^2F}{dy\,dz}=\xi',\ \frac{d^2F}{dx\,dz}=\eta',\ \frac{d^2F}{dx\,dy}=\zeta'\\&\frac{Dx}{Dz}=p,\ \frac{Dy}{Dz}=q\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

so dass nach Division mit $(Dz)^2$ die vorhergehende Gleichung die folgende Form annimmt:

$$\frac{d^2F}{d\omega^2}=(Dz)^2\{\xi p^2+\eta q^2+\zeta+2\zeta'pq+2\eta'p+2\xi'q\} \tag{13}$$

und diese Grösse annullirt sich dann, wenn gleichzeitig

$$\xi=0,\ \eta=0,\ \zeta=0,\ \xi'=0,\ \eta'=0,\ \zeta'=0 \tag{14}$$

wird. Ist diess nun nicht der Fall, so bilden die aus den Gleichungen (11) entwickelten Werthe von x, y, z ein Maximum oder Minimum, je nachdem das in der Parenthese von no. (13) stehende negativ oder po-

sitiv ist. Hierzu gehört erstlich, dass die genannte Grösse, die sich auch in folgender Form darstellen lässt:

$$\xi p^2 + 2(\eta' + \zeta' q)p + \eta q^2 + 2\xi' q + \zeta \quad (15)$$

für alle p und q einerlei Zeichen behalte, dass also die Wurzeln der Gleichung, welche man für p erhält, wenn man das Ganze $=0$ setzt, imaginär seien. Da nun eine Gleichung von der Form $\alpha s^2 + 2\beta s + \gamma$ nur für $\beta^2 - \alpha\gamma < 0$ imaginäre Wurzeln hat, so muss

$$(\eta' + \zeta' q)^2 - \xi(\eta q^2 + 2\xi' q + \zeta) < 0,$$

oder, wenn man Alles nach Potenzen von q ordnet,

$$(\zeta'^2 - \xi\eta)q^2 + 2(\eta'\zeta' - \xi\xi')q + \eta'^2 - \xi\zeta < 0 \quad (16)$$

sein. Hierzu gehört nun erstlich, dass die ganze Funktion einerlei Zeichen behalte, oder dass, wenn man sie gleich Null setzt, die Wurzeln imaginär sind, also nach der vorigen Regel

$$(\eta'\zeta' - \xi\xi')^2 - (\zeta'^2 - \xi\eta)(\eta'^2 - \xi\zeta) < 0 \quad (17)$$

sei. Die Funktion auf der linken Seite von (16) hat unter dieser Bedingung für alle q das nämliche Zeichen, also, wenn $q=0$ genommen wird, das ihres letzten Gliedes und ist demnach negativ für

$$\eta'^2 - \xi\zeta < 0, \quad (18)$$

mithin sind die Ungleichungen (17) und (18) die Bedingungen für das Bestehen der Ungleichung (16), d. h. dafür, dass die Funktion in (16) immer einerlei Vorzeichen hat. Diese Bedingungen haben aber noch ein paar wichtige Consequenzen. Aus der Ungleichung (17) folgt nämlich, dass

$$\zeta'^2 - \xi\eta \text{ und } \eta'^2 - \xi\zeta$$

gleiche Vorzeichen haben, weil sonst nach (17) die Summe zweier negativen Grössen positiv ausfiele; hieraus folgt wieder, dass wenn die Ungleichung (18) erfüllt ist, auch die folgende statt findet:

$$\zeta'^2 - \xi\eta < 0,$$

und aus beiden zusammen ergiebt sich, dass einerseits η, ξ und ζ, andererseits ξ und η, also zusammen ξ, η und ζ gleiche Vorzeichen haben. Da nun weiter die Bedingungen (17) und (18) zur Folge haben, dass der Ausdruck in (14) für alle p und q sein Zeichen nicht ändert, so hat derselbe ($p=0$, $q=0$ gesetzt) das Zeichen des letzten Gliedes ζ, welches nach dem Vorigen mit dem von ξ und η identisch ist, wird also mit diesem zugleich negativ und positiv. Diess Alles zusammen giebt folgende Regel:

Die aus den Gleichungen $\frac{dF}{dx}=0, \frac{dF}{dy}=0, \frac{dF}{dz}=0$ abgeleiteten Werthe von x, y und z müssen zunächst die Bedingungen

$$\left.\begin{array}{c} \zeta'^2-\xi\eta<0 \\ (\eta'\zeta'-\xi\xi')^2-(\zeta'^2-\xi\eta)(\eta'^2-\xi\zeta)<0 \end{array}\right\} \quad (19)$$

erfüllen und erzeugen das Maximum oder Minimum von $F(x,y,z)$, je nachdem für sie die Differenzialquotienten

$$\frac{d^2F}{dx^2}=\xi, \frac{d^2F}{dy^2}=\eta, \frac{d^2F}{dz^2}=\zeta \quad (20)$$

gleichzeitig negativ oder positiv ausfallen.

Verschwänden dagegen ξ, η, ζ und ξ', η', ζ' gleichzeitig, so würde man die höheren Differenzialquotienten von $F(x,y,z)$ in Betracht ziehen müssen, worüber sich im Allgemeinen nicht viel sagen lässt, da man hier, wie in I., auf höhere Gleichungen stösst. — Wie man bei Funktionen noch mehrerer Variabelen zu verfahren habe, wird aus dem hier Vorgetragenen völlig erhellen.

§ 33.

Maxima und Minima der Funktionen mehrerer von einander nicht völlig unabhängiger Variabelen.

Es enthalte die Funktion $F(x,y,z,\ldots)$, die wir wie bisher kurz mit F bezeichnen wollen, m veränderliche Grössen, und ausserdem seien noch n verschiedene Gleichungen zwischen $x, y, z, \ldots$ gegeben, etwa in der Form

$$\Phi(x,y,z,\ldots)=0, \ \Psi(x,y,z,\ldots)=0, \ \Pi(x,y,z,\ldots)=0 \text{ etc.} \quad (1)$$

so ist klar, dass die m Veränderlichen der Funktion F nicht mehr von einander unabhängig sein werden; in der That enthält dieselbe nicht mehr als $m-n$ von einander independente Variable, da man mit Hülfe der n gegebenen Gleichungen n Veränderliche unter den m vorhandenen durch die $m-n$ übrigen ausdrücken kann. Ist nun das Maximum oder Minimum von F aufzusuchen, so liegt es am nächsten, die angedeutete Elimination von n Variablen zuerst vorzunehmen und dann nach den Regeln des vorigen Paragraphen zu verfahren. Der Ausführung dieses Gedankens stehen aber grosse Schwierigkeiten entgegen und sie würde namentlich in dem Falle ganz unmöglich sein,

wo die Gleichungen (1) von höheren Graden sind. Wir müssen uns desshalb nach einer bequemeren Methode umsehen.

Denken wir uns, wie früher, $x, y, z, \ldots$ als Funktionen einer neuen Variabelen ω und setzen zur Abkürzung

$$\frac{dx}{d\omega} = Dx\ ,\ \frac{dy}{d\omega} = Dy\ ,\ \frac{dz}{d\omega} = Dz, \ldots$$

so ist

$$\frac{dF}{dy} = \frac{dF}{dx} Dx + \frac{dF}{dy} Dy + \frac{dF}{dz} Dz + \ldots \qquad (2)$$

So wenig aber die Variablen $x, y, z, \ldots$ von einander unabhängig sind, so wenig sind es die Grössen $Dx, Dy, Dz, \ldots$ und in der That giebt es unter ihnen nur $m-n$ völlig beliebige und independente. Bezeichnen wir nämlich die Gleichungen (1) kurz mit

$$\Phi = 0\ ,\ \Psi = 0\ ,\ \Pi = 0\ , \ldots \qquad (3)$$

so folgt durch Differenziation derselben nach ω:

$$\frac{d\Phi}{d\omega} = 0,\ \frac{d\Psi}{d\omega} = 0\ ,\ \frac{d\Pi}{d\omega} = 0\ , \ldots$$

oder auch

$$\left.\begin{array}{l} \frac{d\Phi}{dx} Dx + \frac{d\Phi}{dy} Dy + \frac{d\Psi}{dz} Dz + \ldots = 0 \\ \frac{d\Psi}{dx} Dx + \frac{d\Psi}{dy} Dy + \frac{d\Psi}{dz} Dz + \ldots = 0 \\ \frac{d\Pi}{dx} Dx + \frac{d\Pi}{dy} Dy + \frac{d\Pi}{dz} Dz + \ldots = 0 \end{array}\right\} \quad (4)$$

u. s f.

Aus diesen n Gleichungen lassen sich nun n der Grössen $Dx, Dy, Dz, \ldots$, also etwa $Dr, Ds, Dt \ldots$, entwickeln, d. h. durch die $m-n$ übrigen $Dx, Dy, Dz, \ldots Dq$ ausdrücken, und in der That gehört hierzu nur die Auflösung von n Gleichungen des ersten Grades, welche jederzeit möglich ist. Durch Substitution dieser Werthe von Dr, Ds, Dt etc. fallen aus der Gleichung (3) alle diejenigen von den Grössen $Dx, Dy, Dz, \ldots Dq, Dr, Ds, Dt, \ldots$ weg, die nicht völlig willkührlich sind; denkt man sich hierauf alle die Glieder vereinigt, die entweder Dx, oder $Dy, Dz, \ldots Dq$ als gemeinschaftlichen Faktor enthalten, so nimmt die Gleichung selbst folgende Form an,

$$\frac{dF}{d\omega} = XDx + YDy + ZDz + \ldots + QDq,$$

wobei X, Y, Z, ... Q Summen sind, die sich aus dem angedeuteten Calcül von selbst ergeben, und Dx, Dy, ... Dq ganz willkührliche Grössen der Anzahl nach $m-n$ darstellen. Soll nun ein Maximum oder Minimum statt finden, so muss $\frac{dF}{d\omega}=0$ sein, woraus wegen der Willkührlichkeit von X, Y, Z, ... folgt

$$X=0\,,\; Y=0\,,\; Z=0\,,\; \ldots\; Q=0. \tag{6}$$

Diese $m-n$ Gleichungen dienen zur Bestimmung der Werthe von $m-n$ Grössen x, y, z, ... q unter den überhaupt vorhandenen m Variablen x, y ... q, r, s, t .... Die noch übrigen n Veränderlichen r, s, t, ... erhält man hierauf mit Hülfe der n Gleichungen (3).

Um nun zu entscheiden, ob die gefundenen Werthe einem Maximum oder Minimum von F entsprechen, entwickeln wir den zweiten Differenzialquotienten von F nach ω; aus no. (5) ergiebt sich

$$\begin{aligned}\frac{d^2F}{d\omega^2}=&\frac{d(XDx)}{dx}\cdot\frac{dx}{d\omega}+\frac{d(YDy)}{dx}\cdot\frac{dx}{d\omega}+\frac{d(ZDz)}{dx}\cdot\frac{dx}{d\omega}+\ldots\\&+\frac{d(XDx)}{dy}\cdot\frac{dy}{d\omega}+\frac{d(YDy)}{dy}\cdot\frac{dy}{d\omega}+\frac{d(ZDz)}{dy}\cdot\frac{dy}{d\omega}+\ldots\\&+\frac{d(XDx)}{dz}\cdot\frac{dz}{d\omega}+\frac{d(YDy)}{dz}\cdot\frac{dz}{d\omega}+\frac{d(ZDz)}{dz}\cdot\frac{dz}{d\omega}+\ldots\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

und durch Differenziation der einzelnen Produkte unter Berücksichtigung der Gleichungen (6)

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2F}{d\omega^2}=&\frac{dX}{dx}(Dx)^2+\frac{dY}{dy}Dx\,Dy+\frac{dZ}{dx}Dx\,Dz+\ldots\\&+\frac{dX}{dy}Dy\,Dx+\frac{dY}{dy}(Dy)^2+\frac{dZ}{dy}Dy\,Dz+\ldots\\&+\frac{dX}{dz}Dz\,Dx+\frac{dY}{dz}Dz\,Dy+\frac{dZ}{dz}(Dz)^2+\ldots\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Die für x, y, z, ... gefundenen Werthe entsprechen nun einem Maximum oder Minimum, je nachdem der vorliegende Ausdruck negativ oder positiv bleibt. Hierzu gehört, dass nicht alle die verschiedenen partiellen Differenzialquotienten von X, Y, Z etc. gleichzeitig verschwinden und die Reihe rechts, als Funktion von Dx, Dy, Dz etc. betrachtet, ihr Vorzeichen nicht ändere. Da in derselben nur die $m-n$ von einander unabhängigen Grössen Dx, Dy, ... Dq vorkom-

men wie in no. (5), so ist zur Erfüllung der ebengenannten Bedingung nöthig, dass die Gleichung

$$0 = \frac{dX}{dx}(Dx)^2 + \frac{dY}{dx} Dx\,Dy + \ldots + \frac{dX}{dy} Dy\,Dx + \frac{dY}{dy}(Dy)^2 + \ldots.$$
$$+ \frac{dX}{dz} Dz\,Dy + \frac{dY}{dz} Dz\,Dy + \ldots$$

nach Dx , Dy , Dz etc. aufgelöst nur imaginäre Wurzeln habe, was sich in jedem einzelnen Falle leicht entscheiden lässt. Ob das nachher vorhandene constante Vorzeichen ein Plus- oder Minuszeichen ist, lässt sich dann immer ohne Schwierigkeit absehn.

Wären dagegen sämmtliche partielle Differenzialquotienten von X , Y , Z etc. $= 0$ für die vorher gefundenen Werthe von x , y , z etc., so würde man sich an die höheren Differenzialquotienten von F zu wenden und hier eine ganz ähnliche Untersuchung anzustellen haben.

Wie man nun diese Regeln anzuwenden hat, wird sich aus den folgenden Beispielen ergeben.

I. Man soll die Summe $x^2 + y^2 + z^2$ zu einem Maximum oder Minimum machen unter der Voraussetzung, dass gleichzeitig immer $ax + by + cz = k$ ist.

Wir haben hier

$$F = x^2 + y^2 + z^2 \;,\; \Phi = ax + by + cz - k$$

und folglich nach (2) und (4)

$$\frac{dF}{d\omega} = 2x\,Dx + 2y\,Dy + 2z\,Dz,$$
$$0 = aDx + bDy + cDz.$$

Aus der letzten Gleichung ergiebt sich

$$Dz = -\frac{a}{c} Dx - \frac{b}{c} Dy$$

und durch Substitution dieses Werthes geht die erste Gleichung in folgende über:

$$\frac{dF}{d\omega} = 2\left(x - \frac{a}{c} z\right) Dx + 2\left(y - \frac{b}{c} z\right) Dy,$$

so dass also

$$X = 2\left(x - \frac{a}{c} z\right) \quad , \quad Y = 2\left(y - \frac{b}{c} z\right)$$

ist. Aus $X = 0$, $Y = 0$ folgt nun

$$x = \frac{a}{c} z \; , \; y = \frac{b}{c} z$$

und wenn wir diess in die Gleichung $ax + by + cz = k$ substituiren, so ergeben sich die Werthe

$$z = \frac{ck}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

$$y = \frac{bk}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

$$x = \frac{ak}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Nach no. (8) ist nun weiter, da wir blos zwei unabhängige Variabele x und y haben,

$$\frac{d^2F}{d\omega^2} = \frac{dX}{dx}(Dx)^2 + \frac{dY}{dx} Dx\, Dy + \frac{dX}{dy} Dy\, Dx + \frac{dY}{dy}(Dy)^2$$

und nach dem Obigen

$$\frac{dX}{dx} = 2 \, , \, \frac{dY}{dx} = 0 \, , \, \frac{dX}{dy} = 0 \, , \, \frac{dY}{dy} = 2;$$

also die rechte Seite der vorigen Gleichung

$$= 2(Dx)^2 + 2(Dy)^2.$$

Da dieser Ausdruck immer positiv ist, so entsprechen die für x, y, z gefundenen Werthe einem Minimum von F.

2. Um auch ein Beispiel aus der Geometrie zu haben, behandeln wir die Aufgabe:

Unter allen rechtwinklichen Parallelpipeden von der gleichen Oberfläche $2k$ dasjenige zu finden, welches den grössten kubischen Inhalt hat.

Nennen wir x , y , z die drei in einer Ecke zusammenstossenden Kanten, so ist die Oberfläche unseres Körpers $= 2(xy + xz + yz)$ und folglich immer

$$xy + xz + yz - k = 0.$$

Das Volumen dagegen ist $= xyz$; um diesen Ausdruck zu einem Maximum zu machen, brauchen wir diess blos mit $l(xyz) = lx + ly + lz$ zu thun*),

*) Dieser Uebergang ist nicht gerade nothwendig, denn man könnte F auch unmittelbar $= xyz$ setzen, er erleichtert aber den Calcül.

da der Logarithmus einer Zahl mit ihr selbst zugleich wächst. Wir haben daher

$$F = lx + ly + lz \;,\; \Phi = xy + xz + yz - k.$$

Hieraus folgt

$$\frac{dF}{d\omega} = \frac{1}{x} Dx + \frac{1}{y} Dy + \frac{1}{z} Dz,$$
$$0 = (y+z) Dx + (x+z) Dy + (x+y) Dz;$$

mithin

$$Dz = -\frac{y+z}{x+y} Dx - \frac{x+z}{x+y} Dy$$

und folglich

$$\frac{dF}{d\omega} = \left\{ \frac{1}{x} - \frac{y+z}{x+y} \cdot \frac{1}{z} \right\} Dx + \left\{ \frac{1}{y} - \frac{x+z}{x+y} \cdot \frac{1}{z} \right\} Dy$$

also

$$X = \frac{1}{x} - \frac{y+z}{x+y} \cdot \frac{1}{z} \;,\; Y = \frac{1}{y} - \frac{x+z}{x+y} \cdot \frac{1}{z}.$$

Aus $X = 0$, $Y = 0$ erhält man jetzt sehr leicht

$$x = z \;,\; y = z$$

und hieraus mittelst der Gleichung $\Phi = 0$:

$$x = y = z = \sqrt{\frac{k}{3}}.$$

Nun ist weiter

$$\frac{dX}{dx} = -\frac{1}{x^2} + \frac{y+z}{(x+y)^2} \cdot \frac{1}{z}$$

oder weil $x = y = z$ ist

$$\frac{dX}{dx} = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{(2x)^2} = -\frac{1}{2x^2},$$

ferner

$$\frac{dX}{dy} = \frac{z-x}{(x+y)^2} \cdot \frac{1}{z} = 0, \text{ weil } z = x.$$

Ebenso findet man

$$\frac{dY}{dy} = -\frac{1}{2y^2} = -\frac{1}{2x^2} \text{ und } \frac{dY}{dx} = 0.$$

Hieraus ergiebt sich nun

$$\frac{d^2F}{d\omega^2}=-\frac{1}{2x^2}(Dx)^2-\frac{1}{2y^2}(Dy)^2$$
$$=-\frac{k}{2.3}[(Dx)^2+(Dy)^2].$$

Da dieser Ausdruck immer negativ bleibt, so entsprechen die gefundenen Werthe einem Maximum. Geometrisch erhellt hieraus, dass der Würfel das grösste unter allen Parallelepipeden von gleicher Oberfläche ist.

3. Das grösste Viereck zu bestimmen, welches sich mit den gegebenen Seiten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ beschreiben lässt.

Nennen wir x und y die einander gegenüberliegenden Winkel, welche von den Seiten α, β und γ, δ eingeschlossen werden, so haben wir für den Inhalt des Vierecks:

$$\frac{\alpha\beta}{2}\sin x+\frac{\gamma\delta}{2}\sin y,$$

und wenn dieser, also auch das Doppelte von ihm, ein Maximum werden soll, so ist

$$F(x, y)=\alpha\beta\sin x+\gamma\delta\sin y$$

zu setzen. Berechnet man ferner diejenige Diagonale, welche durch die Scheitel der Winkel (α, δ) und (β, γ) geht, aus je zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel, so ergiebt sich noch die Bedingungsgleichung

$$\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\cos x=\gamma^2+\delta^2-2\gamma\delta\cos y,$$

und also ist

$$\varphi(x, y)=\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2-2\alpha\beta\cos x+2\gamma\delta\cos y=0$$

zu setzen. Es wird nun

$$\frac{dF}{d\omega}=\alpha\beta\cos x\,Dx+\gamma\delta\cos y\,Dy$$

und ebenso vermöge der Bedingungsgleichung $\varphi=0$

$$0=\alpha\beta\sin x\,Dx-\gamma\delta\sin y\,Dy,$$

woraus

$$\gamma\delta\,Dy=\alpha\beta\frac{\sin x}{\sin y}Dx$$

folgt. Die Substitution dieses Werthes in die vorhergehende Gleichung giebt

$$\frac{dF}{d\omega}=\alpha\beta\left(\cos x+\frac{\sin x}{\sin y}\cos y\right)Dx,$$

also

$$X = \alpha\beta\,(\cos x + \frac{\sin x}{\sin y}\cos y).$$

Aus $X=0$ folgt jetzt

$$\cos x \sin y + \sin x \cos y = 0, \text{ d. i. } \sin(x+y) = 0,$$

mithin

$$x+y=0\,,\,180^0\,,\,360^0\,,\,270^0\,,\ldots\text{ etc.}$$

Da aber x und y zwei Winkel eines Vierecks sein sollen, so ist von diesen Werthen nur der zweite

$$x+y=180^0\,,\; y=180^0-x$$

zu brauchen. Setzen wir diess in die Bedingungsgleichung $\varphi(x,y)=0$ und bemerken, dass jetzt $\cos y = -\cos x$ ist, so ergiebt sich

$$\cos x = \frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2}{2(\alpha\beta+\gamma\delta)}.$$

Dass dieser Werth einem Maximum entspricht, entscheidet sich jetzt leicht mit Hülfe der Formel (8), welche in unserem Falle nur ein einziges Glied auf der rechten Seite hat, weil nur eine unabhängige Variable x in der Aufgabe vorkommt und keine Y, Z etc. vorhanden sind. Es ist nämlich

$$\frac{d^2F}{d\omega^2} = \frac{dX}{dx}(Dx)^2 = \alpha\beta\,(-\sin x + \frac{\cos x}{\sin y}\cos y)\,(Dx)^2$$
$$= \frac{\alpha\beta\cos(x+y)}{\sin y}(Dx)^2.$$

Da nun $x+y=180^0$, $\cos(x+y)=-1$, y immer ein Winkel $<180^0$ und folglich $\sin y$ positiv ist, so bleibt $\frac{d^2F}{d\omega^2}$ negativ und mithin entsprechen die gefundenen Werthe einem Maximum. Berücksichtigt man noch, dass sich um jedes Viereck, dessen Gegenwinkel sich zu zwei Rechten ergänzen, ein Kreis beschreiben lässt, so erhellt sogleich der Satz: unter allen Vierecken, welche aus den nämlichen Seiten construirt sind, hat das Sehnenviereck den grössten Flächeninhalt.

Cap. VIII. Die Theoreme von Taylor und Mac Laurin.

§ 34.

Anwendungen, die sich von den Lehren des §. 27. machen lassen.

Wir haben früher in §§ 26 und 27 zwei Theoreme kennen gelernt, welche folgendermassen lauteten:

I. Wenn die Funktion $F(x)$ und ebenso ihre Derivirte $F'(x)$ innerhalb der Gränzen $x=a$ bis $x=a+h$ endlich und stetig bleibt, so ist

$$F(a+h) = F(a) + hF'(a+\lambda h)\ ,\ 1 \geqq \lambda \geqq 0.$$

II. Wenn die Funktionen $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, ... $f^{(n)}(x)$ innerhalb des Intervalles $x=0$ bis $x=h$ sämmtlich stetig und endlich bleiben, wenn ferner für $x=0$:

$$f(0) = f'(0) = f''(0) \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$$

ist, so gilt die Gleichung

$$f(h) = \frac{h^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(\lambda_n h)\ ,\ 1 \geqq \lambda_n \geqq 0.$$

Diese Sätze haben das Eigenthümliche, dass sich durch eine sehr einfache Combination eine fortgesetzte Anwendung des zweiten Theoremes auf das erste vermitteln lässt. Stellen wir nämlich die erste Gleichung in folgender Form dar:

$$F(a+h) = F(a) + \frac{h}{1} F'(a) + h\{F'(a+\lambda h) - F'(a)\}$$

oder, wenn zur Abkürzung $h\{F'(a+\lambda h) - F'(a)\} = f(h)$ gesetzt wird,

$$F(a+h) = F(a) + \frac{h}{1} F'(a) + f(h),$$

so ist es nicht schwer, einige Eigenschaften der Funktion $f(h)$ anzugeben, welche eine kürzere Ausdrucksweise derselben möglich machen. Es ist nämlich

$$f(h) = F(a+h) - F(a) - \frac{h}{1} F'(a)$$
$$f'(h) = F'(a+h) - F'(a)$$
$$f''(h) = F''(a+h)$$

und für $h=0$, $f(0)=0$, $f'(0)=0$ folglich nach dem Theoreme II für $n=2$, und $f''(x)$ von $x=0$ bis $x=h$ als stetig und endlich oder $F''(x)$ von $x=a$ bis $x=a+h$ als continuirlich und endlich vorausgesetzt,

$$f(h) = \frac{h^2}{1.2} F''(a+\lambda_2 h).$$

Demnach ist jetzt

$$F(a+h) = F(a) + \frac{h}{1} F'(a) + \frac{h^2}{1.2} F''(a+\lambda_2 h),$$

wofür wir wieder schreiben

$$F(a+h) = F(a) + \frac{h}{1} F'(a) + \frac{h^2}{1.2} F''(a)$$
$$+ \frac{h^2}{1.2} \{F''(a+\lambda_2 h) - F''(a)\}.$$

Bezeichnen wir das auf der rechten Seite unter der Zeile stehende mit $f(h)$, so finden sich leicht die folgenden Eigenschaften dieser Funktion.

$$f(0)=0\ ,\ f'(0)=0\ ,\ f''(0)=0\ ,\ f'''(h) = F'''(a+h);$$

mithin ist nach dem Theoreme II.

$$f(h) = \frac{h^3}{1.2.3} F'''(a+\lambda_3 h),$$

wobei aber $f'''(h)$ von $x=0$ bis $x=h$ oder $F'''(x)$ von $x=a$ bis $x= a+h$ stetig und endlich sein muss. Vermöge dieses Werthes wird jetzt

$$F(a+h) = F(a) + \frac{h}{1} F'(a) + \frac{h^2}{1.2} F''(a) + \frac{h^3}{1.2.3} F'''(a+\lambda_3 h).$$

Man übersieht leicht den Fortgang dieser Betrachtungen; ist nämlich n eine positive ganze Zahl, so gilt das Theorem

$$F(a+\quad = F(a) + \frac{h}{1} F'(a) + \frac{h^2}{1.2} F''(a) + \frac{h^3}{1.2.3} F'''(a) + \cdots$$
$$\cdots + \frac{h^{n-1}}{1.2..,(n-1)} F^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{1.2...n} F^{(n)}(a+\lambda_n h),$$

wobei λ_n eine die Gränzen 0 und 1 nicht überschreitende Grösse ist. Es muss noch berücksichtigt werden, dass der Reihe nach die Bedin-

gungen gefunden wurden: $F'(x)$ stetig und endlich zwischen $x=a$ und $x=a+h$, ebenso $F''(x)$, $F'''(x) \ldots F^{(n)}(x)$, dass mithin die Gültigkeit des vorliegenden Satzes nur dann behauptet werden darf, wenn die Funktion $F(x)$ nebst ihren Differenzialquotienten bis zum $n$ten inclusive stetig und endlich bleibt von $x=a$ bis $x=a+h$. Setzt man a an die Stelle von h, so lautet der Satz:

Bleibt die Funktion $F(x)$ nebst ihren Differenzialquotienten bis zum $n$ten inclusive stetig und endlich, während x bis auf $x+h$ sich verändert, so ist

$$F(x+h) = F(x) + \frac{h}{1} F'(x) + \frac{h^2}{1.2} F''(x) + \frac{h^3}{1.2.3} F'''(x) + \ldots\ldots$$
$$\ldots + \frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} F^{(n-1)}(x) + \frac{h^n}{1.2\ldots n} F^{(n)}(x+\lambda_n h) \qquad (1)$$

Dieser Satz heisst der Taylorsche, obgleich Taylor ihn in einer von dieser verschiedenen Form ausgesprochen hatte; aus ihm ergiebt sich das Theorem von Mac Laurin, wenn man $x=0$ nimmt und dann x für h schreibt. Es lautet:

Bleibt die Funktion $F(x)$ nebst ihren Differenzialquotienten bis zum $n$ten inclusive stetig und endlich während des Intervalles $x=0$ bis $x=x$, so ist

$$F(x) = F(0) + \frac{x}{1} F'(0) + \frac{x^2}{1.2} F''(0) + \frac{x^3}{1.2.3} F'''(0) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} F^{(n-1)}(0) + \frac{x^n}{1.2\ldots n} F^{(n)}(\lambda_n x) \quad (2)$$

Bei der Wichtigkeit dieser Sätze dürfte es wohl nicht überflüssig sein, eine zweite Ableitung derselben zu geben, bei welcher der heuristische Gedankengang noch schärfer hervortritt.

§. 35.

Heuristische Entwickelung der Sätze von Taylor und Mac Laurin.

Da sich eine Funktion mit ihrer Veränderlichen gleichzeitig ändert, so ist es eine der natürlichsten Aufgaben der Analysis, die Grösse einer solchen Veränderung anzugeben, wenn man die ihr zu Grunde liegende Aenderung der Variablen kennt, oder mit anderen Worten, aus dem Werthe von $F(x)$ den von $F(x+h)$ abzuleiten, vorausgesetzt, dass

13

die Natur der Funktion F, sowie die Werthe von x und h bekannt sind. Sehen wir uns, um erst ein Beispiel zu haben, in der Reihe der gewöhnlichen Funktionen um, so bemerken wir sogleich, dass die Potenz mit ganzem positiven Exponenten eine von den Funktionen ist, für welche sich die Aufgabe sehr leicht lösen lässt, weil nach dem binomischen Satze für ein ganzes positives m

$$(x+h)^m = x^m + \frac{m}{1} x^{m-1} h + \frac{m(m-1)}{1.2} x^{m-2} h^2 + \dots \\ \dots + \frac{m}{1} x h^{m-1} + h^m$$

ist. Hieraus erhellt weiter, dass jede sogenannte ganze rationale und algebraische Funktion vom Grade μ, d. h. ein Ausdruck von der Form

$$F(x) = Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + \dots + Mx^\mu,$$

worin $A, B, C, \dots M$ willkührliche Constanten, $\alpha, \beta, \gamma, \dots \mu$ positive ganze Zahlen, nach ihrer Grösse geordnet, bedeuten, auf gleiche Weise behandelt werden kann, weil die vorige Umwandlung auf jedes einzelne Glied anwendbar ist. Wir haben nämlich

$$\begin{aligned} F(x+h) = {} & \\ & A[x^\alpha + \frac{\alpha}{1} x^{\alpha-1} h + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2} x^{\alpha-2} h^2 + \dots + h^\alpha] \\ & + B[x^\beta + \frac{\beta}{1} x^{\beta-1} h + \frac{\beta(\beta-1)}{1.2} x^{\beta-2} h^2 + \dots + h^\beta] \\ & + C[x^\gamma + \frac{\gamma}{1} x^{\gamma-1} h + \frac{\gamma(\gamma-1)}{1.2} x^{\gamma-2} h^2 + \dots + h^\gamma] \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + M[x^\mu + \frac{\mu}{1} x^{\mu-1} h + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} x^{\mu-2} h^2 + \dots + h^\mu], \end{aligned}$$

und wenn wir diejenigen Glieder zusammennehmen, in welchen gleiche Potenzen von h vorkommen:

$$\begin{aligned} F(x+h) = {} & \\ & Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + \dots + Mx^\mu \\ & + \left\{ A\alpha x^{\alpha-1} + B\beta x^{\beta-1} + C\gamma x^{\gamma-1} + \dots + M\mu x^{\mu-1} \right\} \frac{h}{1} \\ & + \left\{ A\alpha(\alpha-1) x^{\alpha-2} + B\beta(\beta-1) x^{\beta-2} + \dots + M\mu(\mu-1) x^{\mu-2} \right\} \frac{h^2}{1.2} \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + M\mu(\mu-1)(\mu-2)\dots 2.1.\frac{h^\mu}{1.2.3.\mu}. \end{aligned} \tag{1}$$

Andererseits erhält man durch successive Differenziationen der Gleichung

$$F(x) = Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + \dots + Mx^{\mu}$$

leicht Folgendes:

$$F'(x) = A\alpha x^{\alpha-1} + B\beta x^{\beta-1} + \dots + M\mu x^{\mu-1}$$

$$F''(x) = A\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + B\beta(\beta-1)x^{\beta-2} + \dots + M\mu(\mu-1)x^{\mu-2}$$

. . . .

$$F^{(\mu)}(x) = M\mu(\mu-1)(\mu-2)\dots 2.1$$

und durch Substitution dieser Werthe geht die Formel (1) in die folgende über:

$$F(x+h)$$

$$= F(x) + F'(x)\frac{h}{1} + F''(x)\frac{h^2}{1.2} + \dots + F^{(\mu)}(x)\frac{h^{\mu}}{1.2.3\dots\mu}. \quad (2)$$

Nun ist aber nicht jede Funktion eine algebraische ganze und rationale und daher wird sich der vorliegende Satz nur dann auf andere Funktionen ausdehnen lassen, wenn die letzteren unter gewissen Bedingungen für irgend ein Intervall als ganze rationale algebraische angesehen werden dürfen. Dies lässt sich aber im Voraus gar nicht so leicht erkennen, und wir versuchen daher einen anderen Weg zur Entscheidung der obschwebenden Frage.

Denken wir uns aus der Reihe auf der rechten Seite von no. (2) eine beliebige Anzahl Glieder, etwa n, vom Anfange her ausgehoben, und lassen $F(x)$ jetzt eine ganz beliebige Funktion bedeuten, so würde es offenbar blos darauf ankommen, die Summe der Reihe

$$F(x) + \frac{h}{1}F'(x) + \frac{h^2}{1.2}F''(x) + \dots + \frac{h^{n-1}}{1\ 2\dots(n-1)}F^{(n-1)}(x)$$

auszumitteln; diese Summe würde dann von selbst ausweisen, in wie weit das Theorem (2) für willkührliche Funktionen Gültigkeit besitzt. Um aber nicht immer mit zwei Variablen x und h zu thun zu haben, wollen wir $x = c - h$ setzen, wo c eine Constante bedeutet, die fragliche Summe als Funktion von h betrachten und demgemäss mit $\Phi(h)$ bezeichnen, so dass also

$$\Phi(h) = F(c-h) + \frac{h}{1}F'(c-h) + \frac{h^2}{1.2}F''(c-h) + \dots$$

$$\dots + \frac{h^{n-1}}{1.2.3\dots(n-1)}F^{(n-1)}(c-h) \quad (3)$$

ist. In dieser Form besitzt nun die Reihe eine Eigenschaft, welche ihre Summirung sehr erleichtert; es besteht nämlich ihr Differenzialquotient nicht mehr aus n Gliedern, sondern nur aus einem einzigen. In der That ergiebt sich durch Differenziation nach h unter Anwendung der Regel für die Differenziation von Produkten:

$$\begin{aligned}\Phi'(h) = & -F'(c-h)\\ & -\frac{h}{1}F''(c-h)+F'(c-h)\\ & -\frac{h^2}{1.2}F'''(c-h)+\frac{h}{1}F''(c-h)\\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\\ & -\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^{(n)}(c-h)+\frac{h^{n-2}}{1.2\ldots(n-2)}F^{(n-1)}(c-h),\end{aligned}$$

d. i. nach gegenseitiger Hebung

$$\Phi'(h) = -\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^{(n)}(c-h). \tag{4}$$

Um nun aus dem Differenzialquotienten von $\Phi(h)$ diese Funktion selbst zu finden, wenden wir uns an den in §. 27. bewiesenen Satz:

$$\frac{\Phi(a+h)-\Phi(a)}{\Psi(a+h)-\Psi(a)} = \frac{\Phi'(a+\lambda h)}{\Psi'(a+\lambda h)}, \; 1 \geqq \lambda \geqq 0,$$

welcher unter der Bedingung gilt, dass $\Phi(z)$, $\Psi(z)$, $\Phi'(z)$ und $\Psi'(z)$ endlich und stetig bleiben von $z=a$ bis $z=a+h$ und $\Psi'(z)$ während dieses Intervalles sein Vorzeichen nicht ändert. Nehmen wir $a=0$ und substituiren für $\Psi(z)$ eine andere stetige und endliche Funktion $\psi(z)$, welche aber für $z=0$ verschwindet, so ist

$$\frac{\Phi(h)-\Phi(0)}{\psi(h)} = \frac{\Phi'(\lambda h)}{\psi'(\lambda h)},$$

woraus

$$\Phi(h) = \Phi(0) + \frac{\psi(h)}{\psi'(\lambda h)}\Phi'(\lambda h), \; 1 \geqq \lambda \geqq 0, \tag{5}$$

folgt, und diese letztere Gleichung kann dienen, um $\Phi(h)$ zu finden sobald $\Phi'(h)$ bekannt ist. Wenden wir diess auf unsere spezielle Untersuchung an, so haben wir nach no. (4)

$$\Phi'(\lambda h) = -\frac{(\lambda h)^{n-1}}{1.2\ldots.(n-1)}F^{(n)}(c-\lambda h)$$

und mithin nach no. (5)

$$\Phi(h)=\Phi(0)-\frac{\psi(h)}{\psi'(\lambda h)}\cdot\frac{(\lambda h)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}F^{(n)}(c-\lambda h).$$

Aus der Gleichung (3) ergiebt sich aber unmittelbar

$$\Phi(0)=F(c)$$

und so haben wir jetzt

$$\Phi(h)=F(c)-\frac{\psi(h)}{\psi'(\lambda h)}\cdot\frac{(\lambda h)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}F^{(n)}(c-\lambda h), \qquad (6)$$

womit die fragliche Summe gefunden ist. Wir dürfen aber nicht vergessen, dass diess nur so lange gilt, als die Bedingungen für die Existenz der Gleichung (5) erfüllt sind. Diese waren erstlich Stetigkeit und Endlichkeit von $\Phi(z)$ und $\Phi'(z)$ innerhalb des Intervalles $z=0$ bis $z=h$, was in unserem Falle vermöge der Gleichungen (3) und (4) nur dann statt findet, wenn die Funktionen

$$F(z),\ F'(z),\ F''(z),\ \ldots.\ F^{(n-1)}(z),\ F^{(n)}(z)$$

stetig und endlich bleiben von $z=c$ bis $z=c-h$. Ausserdem müssen in no. (6) $\psi(z)$ und $\psi'(z)$ stetig und endlich innerhalb des nämlichen Intervalles sein und $\psi'(z)$ darf ebendaselbst keinen Zeichenwechsel haben.

Aus der Vergleichung von (3) und (6) folgt jetzt sehr leicht

$$F(c)=F(c-h)+\frac{h}{1}F'(c-h)+\frac{h^2}{1.2}F''(c-h)+\ldots.$$
$$\ldots.+\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^{(n-1)}(c-h)+\frac{\psi(h)}{\psi'(\lambda h)}\cdot\frac{(\lambda h)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^{(n)}(c-\lambda h).$$

Nehmen wir endlich $c=x+h$ und zur Abkürzung $1-\lambda=\lambda_n$, wo nun auch λ_n eine die Gränzen 0 und 1 nicht überschreitende Grösse bedeutet, so wird

$$F(x+h)=F(x)+\frac{h}{1}F'(x)+\frac{h^2}{1.2}F''(x)+\ldots..$$
$$\ldots.+\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^{(n-1)}(x)+\frac{\psi(h)}{\psi'(\lambda h)}\cdot\frac{(\lambda h)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^{(n)}(x+\lambda_n h)$$
$$1\geqq\lambda\geqq 0;\ \lambda_n=1-\lambda. \qquad (7)$$

Die Bedingungen für die Gültigkeit dieser Gleichung sind: 1) es müssen die Funktionen

$$F(z)\ ,\ F'(z)\ ,\ F''(z)\ ,\ \ldots.\ F^{(n-1)}(z)\ ,\ F^{(n)}(z)$$

stetig und endlich bleiben von $z=x$ bis $z=x+h$, und 2) die Funktion $\psi(z)$ muss sich für $z=0$ annulliren, $\psi(z)$ und $\psi'(z)$ müssen innerhalb

des genannten Intervalles stetig und endlich bleiben, und $\psi'(z)$ darf ebendarin sein Vorzeichen nicht ändern.

Da $\psi(z)$ eine beliebige Funktion ist, so hält es nicht schwer, eine solche Wahl dafür zu treffen, dass die unter no. 2 ausgesprochenen Bedingungen erfüllt werden; so z. B. wenn $\psi(z)=z^m$ gesetzt wird, wo m eine positive Grösse bezeichnet. Es ist dann

$$\frac{\psi(h)}{\psi'(\lambda h)}=\frac{h^m}{m(\lambda h)^{m-1}}=\frac{h}{m\lambda^{m-1}},$$

und wenn man diess mit Rücksicht auf die Relation $\lambda=1-\lambda_n$ substituirt, so giebt die Gleichung (7):

$$F(x+h)=F(x)+\frac{h}{1}F'(x)+\frac{h^2}{1.2}F''(x)+\ldots..$$
$$\ldots+\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^{(n-1)}(x)+\frac{(1-\lambda_n)^{n-m}h^n}{1.2\ldots(n-1).m}F^{(n)}(x+\lambda_n h). \quad (8)$$

Da die positive Grösse m noch beliebig gelassen ist, so kann man sie auch $=1$ oder $=n$ setzen, wodurch sich ergiebt:

$$F(x+h)=F(x)+\frac{h}{1}F'(x)+\frac{h^2}{1.2}F''(x)+\ldots.$$
$$\ldots+\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^{(n-1)}(x)+\frac{(1-\lambda_n)^{n-1}h^n}{1.2\ldots(n-1)}F^{(n)}(x+\lambda_n h) \quad (9)$$

und

$$F(x+h)=F(x)+\frac{h}{1}F'(x)+\frac{h^2}{1.2}F''(x)+\ldots.$$
$$\ldots+\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^{(n-1)}(x)+\frac{h^n}{1.2\ldots(n-1)n}F^{(n)}(x+\lambda_n h). \quad (10)$$

Unter den verschiedenen Formen, welche man auf diese Weise bekommen kann, benutzt man natürlich diejenige, welche im speziellen Falle die bequemste Rechnung liefert.

Nimmt man noch $x=0$ und schreibt h für x in den Formeln (9) und (10), so erhält man:

$$F(x)=F(0)+\frac{x}{1}F'(0)+\frac{x^2}{1.2}F''(0)+\ldots..$$
$$\ldots+\frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^{(n-1)}(0)+\frac{(1-\lambda_n)^{n-1}x^n}{1.2.3\ldots(n-1)}F^{(n)}(\lambda_n x) \quad (11)$$

$$F(x)=F(0)+\frac{x}{1}F'(0)+\frac{x^2}{1.2}F''(0)+\ldots.$$
$$\ldots+\frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^{(n-1)}(0)+\frac{x^n}{1.2.3\ldots.n}F^{(n)}(\lambda_n x) \quad (12)$$

wo nun die Funktion $F(z)$ nebst ihren Differenzialquotienten bis zum $n$ten inclus. endlich und stetig von $z=0$ bis $z=x$ sein muss.

Die beiden so entwickelten Theoreme stehen sich übrigens, obgleich hier das zweite als spezieller Fall des ersten erscheint, in Absicht auf ihre Allgemeinheit ganz gleich, denn man kann eben so leicht das erste aus dem zweiten ableiten. Setzt man nämlich in dem letzteren

$$F(x)=f(h+x),$$

so wird

$$F'(x)=f'(h+x),\ F''(x)=f''(h+x),\ \text{u. s. f.},$$

ferner

$$F(0)=f(h),\ F'(0)=f'(h),\ F''(0)=f''(h),\ \text{u. s. f.}$$

und folglich ergiebt sich aus no. (12)

$$f(h+x)=f(h)+\frac{x}{1}f'(h)+\frac{x^2}{1.2}f''(h)+\dots$$

$$\dots+\frac{x^{n-1}}{1.2\dots(n-1)}f^{(n-1)}(h)+\frac{x^n}{1.2\dots.n}f^{(n)}(h+\lambda_n x).$$

Vertauscht man hier h und x gegeneinander und schreibt dann F für f, so kommt man auf die Gleichung (10) zurück.

§. 36.

Beispiele zu dem Theoreme von Mac Laurin.

Von besonderem Nutzen ist der Mac Laurin'sche Satz da, wo es gilt, eine gegebene Funktion in eine nach steigenden Potenzen ihrer Variablen fortschreitende Reihe zu verwandeln; setzt man nämlich

$$\left.\begin{array}{l} F(x)=A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\dots \\ \qquad\dots+A_{n-1}x^{n-1}+R_n, \end{array}\right\} \quad (1)$$

so ist durch Vergleichung mit den in (11) und (12) stehenden Formeln für irgend eine positive ganze Zahl m

$$A_m=\frac{F^{(m)}(0)}{1.2.3\dots m} \qquad (2)$$

und

$$R_n=\frac{(1-\lambda_n)^{n-1}x^n}{1.2.3\dots(n-1)}F^{(n)}(\lambda_n x)=\frac{x^n}{1.2.3\dots n}F^{(n)}(\lambda_n x), \qquad (3)$$

wodurch sämmtliche in no. (1) noch unbekannte Grössen ihre Bestimmung gefunden haben. Wir wollen diess nun auf einige Beispiele anwenden.

I. Sei

$$F(x)=(1+x)^{\mu},$$

worin μ eine ganz beliebige Grösse bezeichnet; man findet hier nach den früher entwickelten Regeln zur Entwickelung der höheren Differenzialquotienten

$$F^{(m)}(x)=\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots.(\mu-m+1)(1+x)^{\mu-m}$$

und folglich nach no. (11), wenn man λ zur Abkürzung für λ_n schreibt:

$$(1+x)^{\mu}=1+\frac{\mu}{1}x+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}{1.2.3}x^3+\ldots$$

$$\ldots+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)}x^{n-1}$$

$$+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1)}{1.2.3\ldots(n-1)}\cdot\frac{(1-\lambda)^{n-1}x^n}{(1+\lambda x)^{n-\mu}}. \quad (4)$$

II. Für

$$F(x)=l(1+x)$$

ergiebt sich

$$F^{(m)}(x)=\frac{(-1)^{m+1}1.2.3\ldots(m-1)}{(1+x)^m},$$

und folglich wieder nach no. (11)

$$l(1+x)=\frac{1}{1}x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\ldots.+\frac{(-1)^n}{n-1}x^{n-1}$$

$$+(-1)^{n+1}\cdot\frac{(1-\lambda)^{n-1}x^n}{(1+\lambda x)^n}. \quad (5)$$

III. Nehmen wir

$$F(x)=e^{kx},$$

wo k eine beliebige Constante bedeutet, so ist

$$F^{(m)}(x)=k^m e^{kx}$$

und folglich nach no. (12), wenn man λ für λ_n schreibt:

$$e^{kx}=1+\frac{kx}{1}+\frac{(kx)^2}{1.2}+\ldots+\frac{(kx)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}$$

$$+\frac{(kx)^n}{1.2.3\ldots..n}e^{\lambda kx}. \quad (6)$$

IV. Die Annahme

$$F(x)=\cos x$$

giebt

$$F^{(m)}(x) = \cos(m\frac{\pi}{2} + x)\ ,\ F^{(m)}(0) = \cos m\frac{\pi}{2};$$

also $F^{(m)}(0) = 0$ wenn m ungerade und $= (-1)^{\frac{m}{2}}$ wenn m gerade ist. Hiernach wird

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2....6} + ...$$

$$... + \frac{x^{n-1}\cos(n-1)\frac{\pi}{2}}{1.2...(n-1)} + \frac{x^n}{1.2...n}\cos(n\frac{\pi}{2} + \lambda x). \quad (7)$$

V. Setzt man

$$F(x) = \sin x,$$

so findet sich

$$F^{(m)}(x) = \sin(m\frac{\pi}{2} + x)\ ,\ F^{(m)}(0) = \sin m\frac{\pi}{2};$$

also $F^{(m)}(0) = 0$ wenn m gerade und $= (-1)^{\frac{m-1}{2}}$ wenn m ungerade ist. Hieraus ergiebt sich

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - .....$$

$$... + \frac{x^{n-1}\sin(n-1)\frac{\pi}{2}}{1.2...(n-1)} + \frac{x^n}{1.2.3...n}\sin(n\frac{\pi}{2} + \lambda x) \quad (8)$$

In allen diesen Gleichungen kommt noch die Grösse λ vor, welche natürlich in jeder derselben einen anderen Werth hat und sich mit x und n selbst ändert, doch so, dass sie die Gränzen Null und Eins nicht überschreitet. Man kann diese Eigenschaft benutzen, um die jedesmal auf der linken Seite stehende Funktion zwischen zwei Gränzen einzuschliessen, wodurch man gewissermassen die Region des Zahlengebietes kennen lernt, in welcher ihr numerischer Werth zu suchen ist. So gäbe z. B. die Gleichung (5) für $n = 2$,

$$l(1+x) = x - \frac{(1-\lambda)x^2}{(1+\lambda x)^2}.$$

Da nun λ die Gränzen 0 und 1 nicht überschreitet, so liegt der Werth von

$$\frac{(1-\lambda)x^2}{(1+\lambda x)^2}$$

nicht ausserhalb der Gränzen

$$\frac{(1-1)x^2}{(1+x)^2}=0 \quad \text{und} \quad \frac{(1-0)x^2}{(1+0x)^2}=x^2$$

und mithin übersteigt nach dem Obigen $l(1+x)$ die Gränzen $x-0$ und $x-x^2$ nicht, oder es ist

$$x \geqq l(1+x) \geqq x-x^2,$$

wo das Gleichheitszeichen nur in dem Falle $x=0$ Anwendung finden würde. Dieser Gebrauch unserer Gleichungen ist aber von nur untergeordneter Bedeutung, weil man damit höchstens zu Näherungsformeln, aber nicht zu genauen Gleichungen für die links stehenden Funktionen kommen könnte. Wichtiger dagegen ist die folgende Bemerkung.

Stellen wir die Gleichung (1) — das allgemeine Schema der späteren Formeln — in der Gestalt

$$\left.\begin{array}{l} F(x) - R_n \\ = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_{n-1} x^{n-1} \end{array}\right\} \quad (9)$$

dar, so liesse sich wohl der Fall denken, dass die Grösse R_n für ein gewisses erst noch zu bestimmendes n verschwände, was z. B. nach der ersten in no. (3) für R_n angegebenen Form für $\lambda_n = 1$ geschehen würde. Es ist aber sogleich zu ersehen, dass diess für kein bestimmtes e n d l i c h e s n möglich ist; denn es würde die in diesem Falle resultirende Gleichung:

$$F(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{n-1} x^{n-1}$$

eine Identität zwischen einer beliebigen Funktion und einer algebraischen ganzen und rationalen Funktion aussprechen, eine Identität, die anders als für ganz spezielle Werthe von x gar nicht bestehen kann. In besonderen Fällen lässt sich diess noch bestimmter aus den Eigenschaften von $F(x)$ nachweisen. Wenn nun aber auch R_n für kein bestimmtes endliches n der Null gleich ist, so wäre doch noch der Fall denkbar, dass sich R_n für unausgesetzt wachsende n der Null als Gränzwerth näherte; dann würde zugleich die Anzahl der auf der rechten Seite vorkommenden Reihenglieder ($=n$) unbegränzt zunehmen und man erhielte einen um so genaueren Werth von $F(x)$, je mehr Glieder der Reihe man vereinigte. Man hätte dann in Zeichen:

$$\begin{array}{l} F(x) - \operatorname{Lim} R_n \\ = \operatorname{Lim} \{A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{n-1} x^{n-1}\} \end{array}$$

und weil $\operatorname{Lim} R_n = 0$ ist:

$$F(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots \text{ in inf.} \quad (10)$$

Wäre dagegen Lim R_n von Null verschieden, so würde man Lim R_n nicht weglassen, also die Gleichung (10) nicht als eine Folgerung von no. (9) ansehen dürfen. Wir wollen nun die sich nöthig machende Untersuchung über den Gränzwerth von R_n an den Beispielen in (4), (5), (6), (7) und (8) ausführen.

§. 37.

Die unendlichen Reihen für Potenz, Logarithmus, Exponenzialgrösse, Cosinus und Sinus.

Wenn wir die Frage entscheiden wollen, in welchen Fällen der Ausdruck R_n sich der Null als Gränzwerth nähert, so wird es bei den mannichfachen Formen, die jene Grösse für verschiedene Funktionen $F(x)$ haben kann, nöthig sein, sich nach einem ganz allgemeinen Criterium umzusehen, woraus man erkennen kann, ob eine beliebige Funktion $f(n)$ von n für unausgesetzt wachsende Werthe von n auf jeden beliebigen Grad der Kleinheit herabsinkt oder nicht. Ein solches Kennzeichen besteht nun in folgendem Satze:

> Wenn der Quotient $\frac{f(n+1)}{f(n)}$ von einer gewissen Stelle an kleiner als die Einheit wird und es auch immer bleibt wie gross man n annehmen möge, wenn also selbst
>
> $$\text{Lim} \frac{f(n+1)}{f(n)} < 1$$
>
> ist, wobei es blos auf den absoluten Werth ankommt, so nimmt die Funktion $f(n)$ selbst unausgesetzt bis zur Gränze Null ab, ist also
>
> $$\text{Lim } f(n) = 0.$$

Nennen wir α den Gränzwerth von $\frac{f(n+1)}{f(n)}$, wo also $\alpha < 1$ ist, und nehmen wir zwischen 1 und α eine Zahl β an ($\beta > \alpha$ aber $\beta < 1$), so muss sich immer ein Werth p von n finden lassen, von welchem ab der Quotient $\frac{f(n+1)}{f(n)} < \beta$ ist. Denn wählt man p ziemlich gross, so kann $\frac{f(p+1)}{f(p)}$ nicht viel von α verschieden sein, man kann diesen Quo-

tienten etwa $= \alpha \pm \delta$ setzen, wo δ nur wenig beträgt und noch überdiess abnimmt, wenn p wächst, wird also auch δ so klein machen können, dass selbst $\alpha + \delta < \beta$ ist. Wir haben dann folgende Ungleichungen:

$$\frac{f(p+1)}{f(p)} < \beta$$
$$\frac{f(p+2)}{f(p+1)} < \beta$$
$$\frac{f(p+3)}{f(p+2)} < \beta$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \quad \cdot$$
$$\frac{f(p+q)}{f(p+q-1)} < \beta,$$

deren Anzahl q beträgt. Durch ihre Multiplikation ergiebt sich

$$\frac{f(p+q)}{f(p)} < \beta^q,$$

und wenn man $p+q=n$ also $q=n-p$ setzt

$$f(n) < f(p)\,\beta^{n-p}.$$

Da nun $\beta < 1$ war, so können wir $\beta = \frac{1}{1+\gamma}$ setzen, wo γ irgend eine positive Grösse ist und erhalten

$$f(n) < \frac{f(p)}{(1+\gamma)^{n-p}}. \qquad (1)$$

Nach dem Binomialtheoreme für ganze positive Exponenten ist bekanntlich

$$(1+\gamma)^m = 1 + \frac{m}{1}\gamma + \frac{m(m-1)}{1.2}\gamma^2 + \ldots + \gamma^m,$$

woraus, weil alle Reihenglieder positiv sind,

$$(1+\gamma)^m > 1 + m\gamma$$

oder

$$\frac{1}{(1+\gamma)^m} < \frac{1}{1+m\gamma}$$

folgt. Man kann daher die Ungleichung (1) in die stärkere

$$f(n) < \frac{f(p)}{1+(n-p)\gamma}$$

umsetzen. Lassen wir hier n unausgesetzt wachsen ohne p zu ändern,

so kann $n-p$, ebenso $(n-p)\gamma$, und folglich auch der ganze Nenner grösser als jede angebbare Zahl werden und mithin der Quotient der Null so nahe kommen als man will. Daraus ergiebt sich dann, dass auch $f(n)$ auf jeden beliebigen Grad der Kleinheit herabgebracht werden kann. — Der Satz besteht übrigens nicht mehr, sobald $\alpha=1$ oder gar >1 ist; im ersten Falle kann $f(n)$ ebensowohl ab- wie zunehmen*) und im zweiten wächst $f(n)$ mit n gleichzeitig über alle Gränze hinaus, wie sich leicht durch eine der obigen ganz analoge Betrachtung zeigen liesse.

Wir gehen nun zu den Anwendungen unseres Theoremes.

I. In der Formel (4) des vorigen Paragraphen ist

$$R_n = \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\dots(\mu-n+1)}{1.2.3\dots(n-1)}\, x^n \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda x}\right)^{n-1} (1+\lambda x)^{\mu-1} \quad (2)$$

und hier brauchen wir auf den letzten Faktor keine Rücksicht zu nehmen, weil er von n gar nicht abhängt. Der erste Faktor annullirt sich unmittelbar, sobald μ gleich einer von den Zahlen $0, 1, 2, \dots (n-1)$ ist, aber in diesem Falle erhalten wir nichts Neues, wir kommen nämlich auf das Binomialtheorem für ganze positive Exponenten zurück. Setzen wir nun für nicht ganze und positive μ

$$f(n) = \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\dots(\mu-n+1)}{1.2\dots(n-1)}\, x^n$$

also

$$f(n+1) = \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\dots(\mu-n+1)(\mu-n)}{1.2\dots(n-1)n}\, x^{n+1},$$

so folgt

$$\frac{f(n+1)}{f(n)} = \frac{\mu-n}{n}\, x = \left(\frac{\mu}{n}-1\right) x$$

und mithin

$$\operatorname{Lim} \frac{f(n+1)}{f(n)} = -x.$$

Soll nun der absolute Werth von $-x$ unter der Einheit liegen, so muss diess mit x selbst der Fall oder $1 > x > -1$ sein. Hierin haben wir die Bedingung für die unausgesetzte Annäherung des ersten Fak-

*) So haben z. B. $\frac{1}{n^2}$ und n^2 beide die Eigenschaft, dass $\operatorname{Lim} \frac{f(n+1)}{f(n)} = 1$ ist; $f(n) = \frac{1}{n^2}$ bildet aber eine abnehmende und $f(n) = n^2$ eine zunehmende Funktion.

tors in (2) an die Null, und es fragt sich nur noch, ob für ein solches x der zweite Faktor nicht etwa unbegränzt zunimmt, so dass $\operatorname{Lim} R_n$ sich unter die vieldeutige Form $0 . \infty$ stellte. Da nun aber λ eine positive Grösse zwischen 0 und 1 ist, so haben wir bei positiven x ganz sicher $1+\lambda x > 1-\lambda$; bei negativen x, wo $1-\lambda x$ an die Stelle von $1+\lambda x$ käme, ist $\lambda x < \lambda$ (wegen $x < 1$), mithin $1-\lambda x > 1-\lambda$, in jedem Falle also ist $\frac{1-\lambda}{1+\lambda x}$ ein ächter Bruch oder wenigstens nicht grösser als die Einheit und folglich übersteigt auch der zweite Faktor:

$$\left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda x}\right)^{n-1}$$

die Einheit nicht. Wir haben daher für $1 > x > -1$ dem absoluten Werthe nach

$$R_n \leqq f(n)(1+\lambda x)^{\mu-1}$$

und folglich $\operatorname{Lim} R_n = 0$. Benutzen wir diess für die Gleichung (4) in §. 36., so ergiebt sich

$$\left.\begin{array}{c}(1+x)^\mu = 1+\frac{\mu}{1}x+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}x^3+\ldots\ldots \\ 1 > x > -1\end{array}\right\} \quad (3)$$

Da hier μ ganz beliebig ist, so führt diese Gleichung den Namen: allgemeines Binomialtheorem. Ein paar andere Formen sind

$$(1+x)^{-\mu} = 1-\frac{\mu}{1}x+\frac{\mu(\mu+1)}{1.2}x^2-\frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)}{1.2.3}x^3+\ldots$$
$$1 > x > -1,$$

und wenn man auch x negativ macht,

$$\left.\begin{array}{c}(1-x)^{-\mu} = 1+\frac{\mu}{1}x+\frac{\mu(\mu+1)}{1.2}x^2+\frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)}{1.2.3}x^3+\ldots \\ 1 > x > -1\end{array}\right\} \quad (4)$$

Nimmt man hier

$$x = \frac{z}{1+z},$$

wo nun z jede beliebige positive Grösse bedeuten kann, so ergiebt sich noch die oft brauchbare Form

$$\left.\begin{array}{c}(1+z)^\mu = 1+\frac{\mu}{1}\left(\frac{z}{1+z}\right)+\frac{\mu(\mu+1)}{1.2}\left(\frac{z}{1+z}\right)^2+\frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)}{1.2.3}\left(\frac{z}{1+z}\right)^3+. \\ z \geqq 0.\end{array}\right\} \quad (5)$$

II. In Formel (5) des vorigen Paragraphen ist

$$R_n = x^n \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda x}\right)^{n-1} \frac{(-1)^{n+1}}{1+\lambda x}, \tag{6}$$

wobei wir wieder auf den letzten Faktor keine Rücksicht zu nehmen brauchen, weil er seinem absoluten Werthe nach von n nicht abhängt. Man übersieht nun auf der Stelle, dass der ganze Ausdruck sich der Gränze Null nähert, sobald

$$1 > x > -1$$

ist. In diesem Falle nämlich übersteigt, wie wir bereits gesehen haben, der zweite Faktor in R_n:

$$\left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda x}\right)^{n-1}$$

die Einheit nicht und folglich ist den absoluten Werthen nach

$$R_n \leqq x^n \frac{1}{1+\lambda x}.$$

Da nun bei ächt gebrochenen x, der Gränzwerth von x^n die Null, $\frac{1}{1+\lambda x}$ dagegen immer eine endliche Grösse ist, so folgt hieraus zusammen

$$\text{Lim}\, R_n = 0 \text{ für } 1 > x > -1.$$

Diese Eigenschaft findet übrigens auch noch für $x = +1$ statt, denn es geht dann R_n seinem absoluten Werthe nach in

$$\left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^{n-1} \frac{1}{1+\lambda}$$

über und da wir wissen, dass λ zwischen 0 und $+1$ liegt, so ist jetzt der erste Faktor hiervon ein ächter Bruch, mithin

$$\text{Lim} \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^{n-1} = 0$$

und also wieder Lim $R_n = 0$. Das Nämliche würde man auch finden, wenn man sich der zweiten aus no. (12) in §. 35. entspringenden Form für R_n bedienen wollte. Nach diesen Bemerkungen ergiebt sich nun aus Formel (5) in §. 36:

$$\left.\begin{array}{c} l(1+x)=\frac{1}{1}x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\ldots \\ 1 \geqq x > -1, \end{array}\right\} (7)$$

also z. B. für $x=1$

$$l2 = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$$

Für negative x ist nach no. (7) wegen $-l(1-x) = l\left(\frac{1}{1-x}\right)$

$$\left.\begin{array}{c} l\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{1}{1}x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4+\ldots \\ 1 > x \geqq -1. \end{array}\right\} (8)$$

Mit Hülfe der Substitution

$$x = \frac{z}{1+z}$$

ergiebt sich hieraus für jedes positive z

$$\left.\begin{array}{c} l(1+z) = \frac{1}{1}\left(\frac{z}{1+z}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{1+z}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{z}{1+z}\right)^3+\ldots. \\ z \geqq 0. \end{array}\right\} (9)$$

Nimmt man die halbe Summe der Gleichungen (7) und (8), so wird

$$\left.\begin{array}{c} \frac{1}{2}\,l\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\frac{1}{1}x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\ldots. \\ 1 > x > -1 \end{array}\right\} (10)$$

und für

$$\frac{1+x}{1-x} = z, \quad \text{also } x = \frac{z-1}{z+1},$$

wo nun z jede positive Grösse bedeuten kann

$$\left.\begin{array}{c} \frac{1}{2}\,lz = \frac{1}{1}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5+\ldots. \\ z > 0. \end{array}\right\} (11)$$

Zur numerischen Berechnung der Logarithmen ist es am bequemsten, solche Reihen zu haben, deren Glieder rasch abnehmen, so dass schon wenige Glieder eine hinreichende Annäherung geben. Man erhält dergl. Reihen auf folgende Weise. In Formel (7) sei $x = \frac{b}{a}$

und $a < b$, so wird $l(1+x) = l\left(1+\frac{b}{a}\right) = l\left(\frac{a+b}{a}\right) = l(a+b) - la$, folglich

$$l(a+b) = la + \frac{1}{1}\frac{b}{a} - \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{b}{a}\right)^3 - \dots \qquad (12)$$

und diese Formel kann zur Berechnung von $l(a+b)$ dienen, sobald la schon bekannt ist. — Setzt man ferner in no. (8) $x = \frac{1}{p^2}$, wo p eine ganze positive Zahl ist, so folgt

$$l\left(\frac{1}{1-x}\right) = l\left(\frac{p^2}{p^2-1}\right) = 2lp - l[(p-1)(p+1)]$$
$$= 2lp - \{l(p-1) + l(p+1)\},$$

woraus man durch Transposition und Division mit 2 leicht erhält

$$\left.\begin{aligned} lp = & \frac{l(p-1) + l(p+1)}{2} \\ & + \frac{1}{2p^2} + \frac{1}{4p^4} + \frac{1}{6p^6} + \frac{1}{8p^8} + \dots \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Nun braucht man aber blos die Logarithmen der Primzahlen unmittelbar zu berechnen; nimmt man für p eine solche, so sind $p-1$ und $p+1$ zusammengesetzte Zahlen, folglich ihre Logarithmen aus der Berechnung der früheren Primzahlen schon bekannt. Diess setzt indessen voraus, dass man den Logarithmus der 2 wenigstens schon kenne, doch lässt sich auch dieser durch einen kleinen Kunstgriff aus der Formel (13) selbst finden. Für $p=2$ und $p=3$ erhält man nämlich

$$l2 = \frac{1}{2}l3 + \frac{1}{2.2^2} + \frac{1}{4.2^4} + \frac{1}{6.2^6} + \dots$$

$$l3 = \frac{l2 + l4}{2} + \frac{1}{2.3^2} + \frac{1}{4.3^4} + \frac{1}{6.3^6} + \dots$$

Es ist aber $l4 = 2l2$, folglich wenn man mit P und Q die Summen der nach Potenzen von $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ fortgehenden Reihen bezeichnet

$$l2 = \frac{1}{2}l3 + P, \quad l3 = \frac{3}{2}l2 + Q.$$

Sieht man hier $l2$ und $l3$ als zwei Unbekannte an und eliminirt dieselben algebraisch, so wird

$$l2 = 4P + 2Q, \quad l3 = 6P + 4Q$$

wodurch $\mathfrak{B}_2$ und $\mathfrak{B}_3$ ihre Bestimmung gefunden haben. Hat man auf diese Weise eine Tafel der natürlichen Logarithmen berechnet, so kann man daraus leicht eine der künstlichen Logarithmen ableiten. Heisst nämlich B die Basis der letzteren und bezeichnen wir mit log einen Logarithmus dieses Systems, so ist bekanntlich

$$\log z = \frac{1}{lB} \cdot lz,$$

wo $\frac{1}{lB}$ der Modulus des Systemes mit der Basis B heisst. Für $B=10$ findet man nach den angegebenen Regeln $lB = 2{,}3025850929$

folglich den Modulus $\frac{1}{lB} = 0{,}4342944819.$

III. In Formel (6) §. XC. ist

$$R_n = \frac{(kx)^n}{1.2.3\ldots n} e^{\lambda kx}.$$

Da nun $e^{\lambda kx}$ für jedes bestimmte k und x eine endliche Grösse bleibt, so wird $\text{Lim } R_n = 0$, sobald der erste Faktor

$$f(n) = \frac{(kx)^n}{1.2.3\ldots n}$$

die Null zum Gränzwerthe hat. Es ist aber

$$\text{Lim } \frac{f(n+1)}{f(n)} = \text{Lim } \frac{kx}{n} = 0$$

für jedes beliebige k und x, und da $0 < 1$, so ist immer $\text{Lim } f(n) = 0$ und $\text{Lim } R_n = 0$. Wir erhalten daher ohne weitere Determination

$$e^{kx} = 1 + \frac{kx}{1} + \frac{(kx)^2}{1.2} + \frac{(kx)^3}{1.2.3} + \ldots \qquad (14)$$

Für $kx = 1$ ergiebt sich hieraus

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots$$

und mittelst dieser Reihe ist es sehr leicht, den Werth von e, den wir in der Einleitung als den Gränzwerth von

$$(1 + \frac{1}{m})^m$$

für unendlich wachsende m kennen lernten, numerisch zu berechnen. — Nehmen wir in (14) $k = la$ und berücksichtigen, dass

$$e^{la.x} = (e^{la})^x = a^x$$

ist, so wird noch

$$a^x = 1 + \frac{x\,la}{1} + \frac{(x\,la)^2}{1.2} + \frac{(x\,la)^3}{1.2.3} + \ldots.$$

IV. In den Formeln (7) und (8) der vorigen Paragraphen ist erst

$$R_n = \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} \cos\left(n\frac{\pi}{2} + \lambda x\right)$$

und dann

$$R_n = \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} \sin\left(n\frac{\pi}{2} + \lambda x\right).$$

Da aber Cosinus und Sinus Grössen sind, welche die Gränzen $+1$ und -1 nicht übersteigen können, was auch der Bogen für einen Werth haben möge, so erhellt, dass in jedem Falle $\text{Lim}\, R_n = 0$ wird, sobald

$$\text{Lim}\, \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} = 0$$

ist. Nach dem, was wir in no. III. gefunden haben, muss diess aber für jedes beliebige x der Fall sein, und daher ergeben sich jetzt die beiden bemerkenswerthen Formeln

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2\ldots6} + \ldots. \quad (16)$$

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots. \quad (17)$$

gültig für jedes x. Es versteht sich beim blosen Anblicke dieser Gleichungen von selbst, dass man hier $\cos x$ und $\sin x$ in dem nämlichen Maasse ausgedrückt erhält, in welchem x angegeben ist. Will man daher, wie gewöhnlich, die goniometrischen Funktionen in Theilen des Halbmessers ausdrücken, so muss man auch x in solchen angeben, was, wenn der Bogen ursprünglich in Graden bestimmt ist, leicht mittelst der Ludolph'schen Zahl geschehen kann, welche dem Bogen von 180° entspricht. Es giebt dann zu jeder beliebigen absoluten Zahl einen Cosinus, Sinus und ebenso alle übrigen goniometrischen Funktionen.

Aus diesen Betrachtungen ist ersichtlich, dass die Bedingungen, unter welchen sich die Grösse R_n der Null unbegränzt nähert, lediglich von der Form der Funktion $F(x)$ abhängen, indem sie sich für Spezialisirungen derselben verschieden gestalten; hierdurch entsteht

für die Anwendung des so fruchtbaren Theoremes von Mac Laurin eine nicht geringe Unbequemlichkeit, in so fern wir genöthigt sind, bei jeder neuen uns vorkommenden Funktion $F(x)$ die Untersuchung über Lim R_n auch wieder von Neuem vorzunehmen. Es wäre daher in hohem Grade wünschenswerth, ein ganz allgemeines Kennzeichen zu haben, mit Hülfe dessen man der Funktion $F(x)$ gleich im voraus ansehen könnte, unter welchen Bedingungen das aus ihr hergeleitete R_n sich der Null als Gränze nähert oder nicht. Man kann die Sache aber auch noch unter einem anderen und sogar bequemeren Gesichtspunkte betrachten. So wie nämlich zwischen $F(x)$ und der Reihe

$$F(0) + \frac{x}{1} F'(0) + \frac{x^2}{1\,2} F''(0) + \ldots \text{ in inf.}$$

nur dann eine Identität statt findet, wenn Lim $R_n = 0$ ist, so kann man auch umgekehrt behaupten, dass wenn jene Identität vorhanden ist, auch $R_n = 0$ sein müsse. Denn gesetzt, man hätte auf einem von dem bisherigen ganz verschiedenen Wege gefunden

$$F(x) = F(0) + \frac{x}{1} F'(0) + \frac{x^2}{1.2} F''(0) + \ldots \text{ in inf.} \qquad (18)$$

und die Bedingungen kennen gelernt, unter welchen diese Gleichung besteht, so würde man dieses Resultat mit dem Mac Laurin'schen Satze zusammenhalten können, nach welchem

$$F(x) - \text{Lim}\, R_n = F(0) + \frac{x}{1} F'(0) + \frac{x^2}{1.2} F''(0) + \ldots \text{ in inf.}$$

sein muss; hieraus ergiebt sich dann

$$F(x) = F(x) - \text{Lim}\, R_n,$$

mithin Lim $R_n = 0$. Es wäre also die Frage zu beantworten, unter welchen Umständen besteht die Gleichung (18)?

Um aber die Allgemeinheit so hoch als möglich zu treiben, ist uns noch ein Schritt nöthig. Wir haben uns früher nicht darauf beschränkt, die Variablen in den Funktionen als blos reell anzusehen, sondern auch imaginäre Werthe derselben zugelassen, wir müssen daher auch die jetzige Untersuchung so allgemein halten, dass sie den Fall imaginärer Veränderlichen in sich schliesst. Zu diesem Zwecke denken wir uns x unter der Form $u + v\sqrt{-1}$ stehend, wo natürlich auch u oder v, die als reell vorausgesetzt werden, der Null gleich sein darf. Berücksichtigt man noch, dass eine zweitheilige Grösse von

der Form $u+v\sqrt{-1}$ stets auf das Schema $\varrho(\cos\tau+\sqrt{-1}\sin\tau)$ gebracht werden kann*), so spricht sich das Thema der jetzt nöthigen Untersuchung in folgender Frage aus:

> Welche Eigenschaften müssen der Funktion $F(x)$ zukommen und welchen Bedingungen muss x unterworfen sein, wenn die Gleichung:
>
> $$F(x)=F(0)+\frac{x}{1}F'(0)+\frac{x^2}{1.2}F''(0)+\ldots \text{ in inf.} \quad (19)$$
>
> worin x unter der Form $\varrho(\cos\tau+\sqrt{-1}\sin\tau)$ vorausgesetzt wird, gelten soll?

§ 38.

Beziehungen zwischen einer Funktion und ihrem ersten Differenzialquotienten bei imaginären Variablen.

Da die Gleichung no. (19), ganz im Allgemeinen betrachtet, eine Beziehung zwischen einer Funktion und ihren successiven Differenzialquotienten enthält, so wird es vor Allem darauf ankommen, zu entscheiden, in wie fern sich die Relationen, welche wir bei reellen Variablen zwischen einer Funktion und ihren Differenzialquotienten statt finden sahen, auf imaginäre Veränderliche ausdehnen lassen. Wenden wir uns daher zunächst an die einfachste dieser Relationen nämlich

$$F(b)-F(a)$$
$$=\operatorname{Lim}\delta\{F'(a)+F'(a+\delta)+F'(a+2\delta)+\ldots+F'(a+\overline{n-1}\,\delta)\} \quad (1)$$

worin

$$\delta=\frac{b-a}{n}$$

---

*) Aus $u+v\sqrt{-1}=\varrho(\cos\tau+\sqrt{-1}\sin\tau)$ folgt nämlich $\varrho\cos\tau=u$, $\sin\tau=v$, mithin

$$(\varrho\cos\tau)^2+(\varrho\sin\tau)^2=u^2+v^2 \text{ oder } \varrho=\sqrt{u^2+v^2}$$
$$\frac{\varrho\sin\tau}{\varrho\cos\tau}=\frac{v}{u} \qquad \text{oder } \tan\tau=\frac{v}{u},$$

womit ϱ (der sogen. **Modulus**) und τ (das **Argument**) bestimmt sind. Für reelle u und v, die in jener Form immer vorausgesetzt werden, fallen auch ϱ und τ immer reell aus.

ist und die Funktion $F(x)$ und ebenso $F'(x)$ als stetig und endlich von $x=a$ bis $x=b$ vorausgesetzt werden, damit keine der Grössen

$$F(b)\ ,\ F(a)\ ,\ F'(a)\ ,\ F'(a+\delta)\ ,\ \ldots\ F'(a+\overline{n-1}\,\delta)$$

zweideutig oder unendlich ausfalle.

Substituiren wir jetzt für $F(x)$ eine andere Funktion, welche die imaginäre Grösse $\sqrt{-1}=i$ enthält, nehmen also etwa

$$F(x)=f[r(\cos x+\sqrt{-1}\sin x)]=f(re^{xi}), \qquad (2)$$

so ist die Operation des Differenzirens ganz gleichförmig ausführbar, wie schon in der ersten Abtheilung gezeigt wurde. Für

$$re^{xi}=z$$

ist nämlich

$$\frac{dF(x)}{dx}=\frac{df(z)}{dx}=\frac{df(z)}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=f'(z)\,.rie^{xi}$$

d. i.

$$F'(x)=rie^{xi}f'(re^{xi}).$$

Sollte nun die Gleichung (1) auch jetzt noch gelten, so müsste nach Substitution der Werthe von $F(x)$ und $F'(x)$:

$$\begin{aligned} &f(re^{bi})-f(re^{ai})\\ &=ri\operatorname{Lim}\delta\,\{e^{ai}f'(re^{ai})+e^{(a+\delta)i}f'(re^{(a+\delta)i})+e^{(a+2\delta)i}f'(re^{(a+2\delta)i})+\ldots\\ &\qquad\ldots+e^{(a+\overline{n-1}\delta)i}f'(re^{(a+\overline{n-1}\delta)i})\} \qquad (4)\end{aligned}$$

sein. In wie weit diess richtig ist, ergiebt sich durch folgende einfache Betrachtung.

Man denke sich die Funktion $f(re^{xi})$ dergestalt zerlegt, dass

$$f(re^{xi})=\varphi(r,x)+i\psi(r,x) \qquad (5)$$

ist, wo $\varphi(r,x)$ und $\psi(r,x)$ ein paar reelle Funktionen von x sind; man hat dann durch Differenziation nach x

$$rie^{xi}f'(re^{xi})=\varphi'(r,x)+i\psi'(r,x).$$

Setzt man hier der Reihe nach a, $a+\delta$, $a+2\delta$, ... $a+\overline{n-1}\delta$ für x, addirt sämmtliche so entstehende Gleichungen und multiplizirt diese Summe mit δ, so folgt

$$\begin{aligned} &ri.\delta\,\{e^{ai}f'(re^{ai})+e^{(a+\delta i)}f'(re^{(a+\delta)i})+e^{(a+2\delta)i}f'(re^{(a+2\delta)i})+\ldots\\ &\qquad\ldots+e^{(a+\overline{n-1}\delta)i}f'(re^{(a+\overline{n-1}\delta)i})\}\\ &=\delta\,\{\varphi'(r,a)+\varphi'(r,a+\delta)+\varphi'(r,a+2\delta)+\ldots+\varphi'(r,a+\overline{n-1}\delta)\}\\ &+i.\delta\,\{\psi'(r,a)+\psi'(r,a+\delta)+\psi'(r,a+2\delta)+\ldots+\psi'(r,a+\overline{n-1}\delta)\}.\end{aligned}$$

Ist nun der Werth von r so gewählt*), dass keine der Funktionen auf der rechten Seite unstetig oder unendlich wird, dass also auch $\varphi(r,x)$

*) Man könnte für den ersten Augenblick glauben, dass auf den Werth von r nichts ankomme, weil er bei der Differenziation nach x als Constante figurirte; man darf aber nicht vergessen, dass eine Funktion von einer Variablen x und einer unbestimmten oder willkührlichen Constanten r im Grunde eine Funktion zweier Variablen r und x, und die Differenziation nach x eine partielle ist; es kann daher auch zusammengehörige Paare von Werthen für r und x geben, für welche diese Funktion unstetig oder unendlich wird. Ein Beispiel zum obigen Satze wird diess erläutern. Sei nämlich $f(z) = \text{Arctan}\, z$, so wird

$$f'(z) = \frac{1}{1+z^2},$$

mithin

$$rie^{xi}f'(re^{xi}) = \frac{ri(\cos x + i\sin x)}{1+\{r(\cos x + i \sin x)\}^2} = \frac{ri(\cos x + i \sin x)}{1+r^2\cos 2x + ir^2 \sin 2x}$$

und wenn man Zähler wie Nenner mit $1 + r^2 \cos 2x - ir^2 \sin 2x$ multiplizirt, nach leichter Reduktion

$$rie^{xi}f'(re^{xi}) = \frac{r(1-r^2)\sin x}{1+2r^2\cos 2x + r^4} + i\frac{r(1+r^2)\cos x}{1+2r^2\cos 2x + r^4}$$

also

$$\varphi'(r,x) = \frac{r(1-r^2)\sin x}{1+2r^2\cos 2x + r^4}.$$

In der obigen Formel durchläuft nun x das Intervall $x=a$ bis $x=b$, indem es nach und nach alle Zwischenstufen $a+\delta$, $a+2\delta$ etc. ersteigt; wäre also z. B. $a < \frac{\pi}{2}$ und $b > \frac{\pi}{2}$, so käme auch der Werth $x = \frac{\pi}{2}$ mit vor, indem eine jener Zwischenstufen etwa $a+k\delta = \frac{\pi}{2}$ würde. In diesem Falle ist dann

$$\varphi'(r, a+k\delta) = \frac{r(1-r^2)}{1-2r^2+r^4} = \frac{r}{1-r^2}.$$

Man übersieht hier auf der Stelle die Determination, welche für r eintreten muss; es darf nämlich r nicht $=1$ sein.

Ebenso leicht findet man umgekehrt für $r=1$

$$rie^{xi}f'(re^{xi}) = i\frac{2}{\cos x}$$

also $\psi'(1,x) = \frac{2}{\cos x}$, woraus folgt, dass das Intervall a bis b nicht den Werth $\frac{\pi}{2}$ einschliessen darf, weil sonst $\psi'(1,x)$ unstetig würde.

und $\psi(r,x)$ selbst stetig und endlich von $x=a$ bis $x=b$ bleiben, so erhalten wir als Gränzwerth der rechten Seite für unendlich abnehmende δ

$$\varphi(r,b) - \varphi(r,a) + i\{\psi(r,b) - \psi(r,a)\}$$
$$= \varphi(r,b) + i\psi(r,b) - \{\varphi(r,a) + i\psi(r,a)\}$$

d. i. nach no. (5)

$$f(re^{bi}) - f(re^{ai})$$

und kommen hiermit wirklich auf die vorhin blos hypothetisch aufgestellte Gleichung (4) zurück.

Um die Bedingungen ihrer Gültigkeit kurz aussprechen zu können, wollen wir noch als Definition festsetzen, dass unter Stetigkeit und Endlichkeit einer Funktion mit imaginärer Variablen die Stetigkeit und Endlichkeit der beiden reellen Funktionen verstanden werden soll, in welche man sich jene nach dem Schema (5) zerlegt denken kann. Die Bedingung, dass die vier Funktionen $\varphi(r,x)$, $\psi(r,x)$, $\varphi'(r,x)$, $\psi'(r,x)$ endlich und stetig bleiben sollen, reduzirt sich nach diesem Sprachgebrauche darauf, dass $f(re^{xi})$ und $e^{xi}f'(re^{xi})$ endlich und stetig sein müssen oder, weil $e^{xi} = \cos x + i \sin x$ schon an sich stetig und endlich ist, auf die Bedingung der Stetigkeit und Endlichkeit von $f(re^{xi})$ und $f'(re^{xi})$. Schreiben wir endlich noch der später nöthig werdenden Bezeichnungen wegen t für x, so können wir folgenden Satz aussprechen:

Wählt man die Grösse r so, dass die Funktionen $f(z)$ und $f'(z)$ endlich und stetig bleiben, sobald man $z = re^{ti}$ und t willkührlich innerhalb des Intervalles $t=a$ bis $t=b$ nimmt, so gilt für

$$\delta = \frac{b-a}{n}$$

die folgenhe Relation:

$$\frac{1}{ri}\{f(re^{bi}) - f(re^{ai})\} =$$
$$\text{Lim}\,\delta\{e^{ai}f'(re^{ai}) + e^{(a+\delta)i}f'(re^{(a+\delta)i}) + e^{(a+2\delta)i}f'(re^{(a+2\delta)i}) + \ldots$$
$$\ldots + e^{(a+\overline{n-1}\delta)i}f'(re^{(a+\overline{n-1}\delta)i})\}, \qquad (6)$$

worin sich das Zeichen Lim auf das unbegränzte Wachsen der ganzen positiven Zahl n bezieht.

Es liegt hier der Gedanke nicht fern, a und b so zu wählen, dass die beiden Grössen

$$e^{ai} = \cos a + i \sin a$$

und

$$e^{bi} = \cos b + i \sin b$$

einander gleich werden, wodurch sich die linke Seite unsrer in (6) verzeichneten Gleichung auf Null reduziren würde; es ist aber nichts leichter als diess, man braucht nämlich blos $a=0$ und $b=2\pi$ zu setzen. Ausserdem wird dann noch $\delta = \frac{2\pi}{n}$, wobei wir zur Abkürzung

$$e^{\delta i} = e^{\frac{2\pi}{n}i} = \cos\frac{2\pi}{n} + i \sin\frac{2\pi}{n} = \vartheta$$

setzen wollen. Berücksichtigen wir endlich, dass $\cos t + i \sin t$ von $t = -\infty$ bis $t = +\infty$ keine anderen Werthe annimmt als solche, die es von $t=0$ bis $t=2\pi$ bekommt, so ergiebt sich noch das Theorem:

> Wählt man die Grösse r so, dass die Funktionen $f(z)$ und $f'(z)$ endlich und stetig bleiben, wenn man für ganz beliebige t die Variable $z = re^{ti}$ setzt, so gilt die Gleichung
>
> $$0 = \operatorname{Lim} \frac{f'(r) + \vartheta f'(r\vartheta) + \vartheta^2 f'(r\vartheta^2) + \ldots + \vartheta^{n-1} f'(r\vartheta^{n-1})}{n}. \quad (8$$

Dass die Gültigkeit dieser Formel sogleich ein Ende hat, wenn eine Unterbrechung der Stetigkeit oder ein Unendlichwerden von $f(z)$ oder $f'(z)$ für $z = re^{ti}$ vorkommt, sieht man sehr leicht an einzelnen Beispielen. Bemerkenswerth in dieser Beziehung ist die Annahme $f(z) = lz$. Vermöge der Formel

$$l(\alpha + \beta i) = \tfrac{1}{2} l(\alpha^2 + \beta^2) + i \operatorname{Arctan}\frac{\beta}{\alpha}$$

ergiebt sich dann

$$l(re^{ti}) = l(r\cos t + ir \sin t) = \tfrac{1}{2} l(r^2) + i \operatorname{Arctan}(\tan t).$$

Nach unserem Sprachgebrauche heisst nun Stetigkeit und Endlichkeit von $l(re^{ti})$ nichts Anderes als Stetigkeit und Endlichkeit von $\frac{1}{2}l(r^2)$ und $\operatorname{Arctan}(\tan t)$. Nun ist $\frac{1}{2}l(r^2)$ stetig und endlich für jedes von 0 verschiedene r, also muss erstlich $r \gtrless 0$ sein. Lassen wir aber in $\operatorname{Arctan}(\tan t)$ die Variable t das Intervall $t=0$ bis $t=2\pi$ durchlaufen, so tritt schon an der Stelle $t = \frac{\pi}{2}$ eine Unterbrechung der Continuität ein. Es ist nämlich, wenn δ eine bis zur Gränze Null abnehmende positive Grösse bezeichnet:

$$\text{Lim Arctan}\left[\tan\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)\right]=\text{Arctan}[+\infty]=+\frac{\pi}{2},$$

$$\text{Lim Arctan}\left[\tan\left(\frac{\pi}{2}+\delta\right)\right]=\text{Arctan}[-\infty]=-\frac{\pi}{2}.$$

An der Stelle $t=\frac{\pi}{2}$ springt also die Funktion $u=\text{Arctan}(\tan t)$ von $u=+\frac{\pi}{2}$ nach $u=-\frac{\pi}{2}$ über. Die Gleichung (8) gilt daher nicht für $f(z)=lz$, und in der That ist dann $f'(z)=\frac{1}{z}$, mithin für ein ganzes positives m

$$\vartheta^m f'(r\vartheta^m)=\vartheta^m\frac{1}{r\vartheta^m}=\frac{1}{r},$$

folglich jener Gränzwerth nicht $=0$, sondern $=\frac{1}{r}$.

Es ist nun auch sehr leicht, den Gränzwerth von

$$\frac{f(r)+f(r\vartheta)+f(r\vartheta^2)+\ldots.+f(r\vartheta^{n-1})}{n}=F(r,n) \qquad (9)$$

auszumitteln, wobei $F(r,n)$ zur Abkürzung gebraucht wird. Es wird nämlich

$$\frac{dF(r,n)}{dr}=\frac{f'(r)+\vartheta f'(r\vartheta)+\vartheta^2 f'(r\vartheta^2)+\ldots+\vartheta^{n-1}f'(r\vartheta^{n-1})}{n},$$

mithin wenn δ ein kleines Inkrement von r bezeichnet:

$$\frac{F(r+\delta,n)-F(r,n)}{\delta}$$

$$=\frac{f'(r)+\vartheta f'(r\vartheta)+\vartheta^2 f'(r\vartheta^2)+\ldots.+\vartheta^{n-1}f'(r\vartheta^{n-1})}{n}+\varepsilon,$$

wo ε eine mit δ gleichzeitig bis zur Null abnehmende Grösse bedeutet. Gehen wir in dieser Gleichung zur Gränze für unausgesetzt wachsende n über, so ist wegen no. (8), wenn wir $\text{Lim}\, F(r,n)$ kurz mit $F(r)$ bezeichnen,

$$\frac{F(r+\delta)-F(r)}{\delta}=\varepsilon$$

und wenn wir noch die Gränze für unendlich abnehmende δ nehmen

$$F'(r)=0$$

für jedes beliebige r. Hieraus folgt sogleich, dass $F(r)$ selbst oder $\operatorname{Lim} F(r, n)$ von r unabhängig, d. i. eine Constante, sein müsse. Diess giebt den Satz:

Wählt man die Grösse r so, dass die Funktionen $f(z)$ und $f'(z)$ endlich und stetig bleiben, wenn man für ganz beliebige t die Variable $z = re^{ti}$ setzt, so gilt die Gleichung:

$$\text{Const.} = \operatorname{Lim} \frac{f(r) + f(r\vartheta) + f(r\vartheta^2) + \ldots + f(r\vartheta^{n-1})}{n}. \quad (10)$$

Da der vorliegende analytische Ausdruck aus $f(z)$ dadurch gebildet wird, dass man für z der Reihe nach $r, r\vartheta, r\vartheta^2, \ldots r\vartheta^{n-1}$ setzt, von den so entstandenen Werthen der Funktion das arithmetische Mittel und von diesem die Gränze für unendlich wachsende n nimmt, so dürfte es nicht unpassend sein, das Endresultat der genannten drei Operationen die Mittelgränze von $f(z)$ für r als Modulus zu nennen und in folgender Weise zu bezeichnen:

$$\operatorname{Lim} \frac{f(r) + f(r\vartheta) + f(r\vartheta^2) + \ldots + f(r\vartheta^{n-1})}{n} = M_r\{f(z)\}. \quad (11)$$

Bevor wir weiteren Untersuchungen über diese jeder Funktion zugehörige Constante Raum geben, wollen wir erst einige Beispiele für die Bestimmung derselben betrachten und zwar solche, die uns beim späteren Verlaufe der Untersuchung selbst wieder von Nutzen sein werden.

§. 39.

Bestimmung der Mittelgränzen einiger Funktionen.

I. Bleiben die Funktionen $f(z)$ und $f'(z)$ endlich und stetig von $z = r_0(\cos t + i \sin t)$ bis $z = r_1(\cos t + i \sin t)$, wobei immer t völlig willkührlich gelassen wird und r_0, r_1 zwei verschiedene Werthe des Modulus r bezeichnen, so hat die Mittelgränze vermöge ihrer Unabhängigkeit von r für alle r zwischen r_0 und r_1 den nämlichen Werth; glückt es also, sie für $r = r_0$ oder $r = r_1$ zu bestimmen, was in speziellen Fällen sehr leicht sein kann, so gilt der gefundene Werth für alle nicht ausserhalb des Intervalles $r = r_0$ bis $r = r_1$ liegende r. Von besonderem Vortheile ist diese Bemerkung in dem Falle $r_0 = 0$, wo also $f(z)$ und $f'(z)$ stetig und endlich von $z = 0$ bis $z = r_1(\cos t + i \sin t)$ bleiben; man hat dann sehr einfach für $r = 0$

$$M_0\{f(z)\}=\mathrm{Lim}\frac{f(0)+f(0)+\ldots+f(0)}{n}=f(0),$$

mithin allgemein

$$M_r\{f(z)\}=f(0)\ ,\ r_1\geqq r\geqq 0. \qquad (1)$$

Nimmt man z. B. $f(z)=z^m$, so wird

$$f(re^{ti})=r^m\{\cos mt+i\sin mt\},$$
$$f'(re^{ti})=mr^{m-1}\{\cos(m-1)t+i\sin(m-1)t\}.$$

Setzt man m als positive ganze Zahl voraus, so giebt es keinen Werth von r und t, für welchen die vier Funktionen

$$r^m\cos mt,\ r^m\sin mt,\ r^{m-1}\cos(m-1)t,\ r^{m-1}\sin(m-1)t$$

unstetig oder unendlich würden; es ist demnach zufolge der Gleichung (1)

$$M_r\{z^m\}=0. \qquad (2)$$

Diess lässt sich auch aus der Definition von $M_r\{z^m\}$ nachweisen. Man hat nämlich

$$M_r\{z^m\}$$
$$=\mathrm{Lim}\frac{1}{n}\{r^m+(r\vartheta)^m+(r\vartheta^2)^m+\ldots.+(r\vartheta^{n-1})^m\}$$
$$=\mathrm{Lim}\frac{r^m}{n}\{1+\vartheta^m+\vartheta^{2m}+\ldots.+\vartheta^{(n-1)m}\}.$$

Stellt man die eingeklammerte Reihe in der Form

$$1+\vartheta^m+(\vartheta^m)^2+(\vartheta^m)^3+\ldots.+(\vartheta^m)^{n-1}$$

dar, so findet man leicht ihre Summe:

$$=\frac{1-(\vartheta^m)^n}{1-\vartheta^m}=\frac{1-\vartheta^{mn}}{1-\vartheta^m}.$$

Vermöge der Bedeutung von ϑ ist aber

$$\vartheta^{mn}=e^{mn\frac{2\pi}{n}i}=\cos 2m\pi+i\sin 2m\pi,$$
$$\vartheta^m=e^{m\frac{2\pi}{n}i}=\cos\frac{2m\pi}{n}+i\sin\frac{2m\pi}{n};$$

mithin

$$M_r\{z^m\}=\mathrm{Lim}\frac{r^m}{n}\cdot\frac{1-\cos 2m\pi-i\sin 2m\pi}{1-\cos\frac{2m\pi}{n}-i\sin\frac{2m\pi}{n}}. \qquad (3)$$

Der Zähler ist hier zwar $=0$, aber man darf daraus nicht schliessen wollen, dass der Gränzwerth ebenfalls Null sei; es ist nämlich

$$\text{Lim}\left(1-\cos\frac{2m\pi}{n}\right)=0\,,\ \text{Lim}\sin\frac{2m\pi}{n}=0$$

und folglich stellt sich das Ganze unter die vieldeutige Form

$$M_r\{z^m\}=\frac{r^m}{\infty}\cdot\frac{0}{0}.$$

Wendet man dagegen im Zähler und Nenner die bekannten goniometri schen Formeln

$$1-\cos 2u=2\sin^2 u\,,\ \sin 2u=2\sin u\cos u$$

an, so wird

$$M_r\{z^m\}=\text{Lim}\,\frac{r^m\sin m\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}\cdot\frac{\sin m\pi-i\cos m\pi}{\sin\frac{m\pi}{n}-i\cos\frac{m\pi}{n}}$$

und unter Berücksichtigung, dass

$$\text{Lim}\sin\frac{m\pi}{n}=0\,,\ \text{Lim}\cos\frac{m\pi}{n}=1,$$

$$\text{Lim}\left(n\sin\frac{m\pi}{n}\right)=\text{Lim}\left(\frac{\sin\frac{m\pi}{n}}{\frac{m\pi}{n}}\right)m\pi=m\pi$$

ist, ergiebt sich endlich

$$M_r\{z^m\}=\frac{r^m\sin m\pi}{m\pi}\cdot\frac{\sin m\pi-i\cos m\pi}{-i}, \qquad (4)$$

d. i. $M_r\{z^m\}=0$ wie früher, weil $\sin m\pi=0$ ist.

II. Sind die Funktionen $f(z)$ und $f'(z)$ stetig und endlich für jedes $r>0$ an bis ins Unendliche hinaus, so kann man $M_r\{f(z)\}$ oft dadurch leicht bestimmen, dass man zuerst den Werth von $M_r\{f(z)\}$ in dem Falle aufsucht, wo r ins Unendliche wächst, was ebenfalls unter Umständen sehr leicht ist. So z. B. für $f(z)=\frac{1}{z^m}$ ist

$$f(re^{ti})=\frac{1}{r^m(\cos mt+i\sin mt)}=\frac{\cos mt-i\sin mt}{r^m}$$

und ähnlich

$$f'(re^{ti})=-m\frac{\cos(m+1)t-i\sin(m+1)t}{r^{m+1}},$$

und bei ganzen positiven m sind beide Funktionen stetig und endlich für alle $r>0$ und sonst beliebige t. Ausserdem ist

$$M_r\left\{\frac{1}{z^m}\right\}=\text{Lim}\,\frac{1}{nr^m}\left\{+\frac{1}{\vartheta^m}+\left(\frac{1}{\vartheta^m}\right)^2+\dots+\left(\frac{1}{\vartheta^m}\right)^{n-1}\right\}.$$

Bestimmt man zuerst $M_r\left\{\frac{1}{z^m}\right\}$ für $r=\infty$, so ist, weil $\text{Lim}\,\frac{1}{r^m}=0$ wird für $r=\infty$, $M_\infty\left\{\frac{1}{z^m}\right\}=0$ und folglich allgemein

$$M_r\left\{\frac{1}{z^m}\right\}=0\,,\ r>0. \tag{5}$$

Man kann diess auch leicht aus der Formel (4) ersehen, wenn man daselbst $(-m)$ an die Stelle von m setzt, wodurch

$$M_r\left\{\frac{1}{z^m}\right\}=\frac{\sin m\pi}{r^m m\pi}\cdot\frac{\sin m\pi+i\cos m\pi}{i}$$

zum Vorschein kommt, was in der That $=0$ ist, wenn nicht $r=0$.

III. Wäre die Funktion $f(z)$ und ebenso ihr Differenzialquotient endlich und stetig von $r=0$ bis $r=r_1$ und dann wieder von $r=r_1$ bis $r=\infty$, so bestände sie gewissermassen aus zwei an einander geschobenen stetigen Funktionen und man würde ihre Mittelgränze für alle r zwischen 0 und r_1 dadurch bestimmen, dass man $r=0$ nähme und für alle $r>r_1$ dadurch, dass man $r=\infty$ nähme. Diese Bestimmungen können natürlich verschieden ausfallen und dann hat die Funktion zwei Mittelgränzen, von denen eine für das Intervall $r=0$ bis $r=r_1$ und die andere für das Intervall $r=r_1$ bis $r=\infty$ gilt. *Z.* B. für

$$f(z)=\frac{z}{z-a},\ \text{also}\ f'(z)=-\frac{a}{(z-a)^2}$$

wird

$$f(re^{ti})=\frac{r(\cos t+i\sin t)}{r\cos t-a+ir\sin t}$$

$$f'(re^{ti})=-\frac{a}{(r\cos t-a+ir\sin t)^2}$$

und wenn wir um grösserer Allgemeinheit willen

$$a=\varrho(\cos\tau+i\sin\tau) \tag{6}$$

setzen, wo ϱ und τ gegebene Grössen sind, so ist

$$f(re^{ti})=\frac{r\cos t+ir\sin t}{r\cos t-\varrho\cos\tau+i(r\sin t-\varrho\sin\tau)}$$

und wenn Zähler wie Nenner mit $r\cos t-\varrho\cos\tau-i(r\sin t-\varrho\sin\tau)$ multiplizirt wird, so ergiebt sich nach einer kleinen Reduktion

$$f(re^{ti})$$
$$=\frac{r^2-r\varrho\cos(t-\tau)}{(r\cos t-\varrho\cos\tau)^2+(r\sin t-\varrho\sin\tau)^2}-i\frac{r\varrho\sin(t-\tau)}{(r\cos t-\varrho\cos\tau)^2+(r\sin t-\varrho\sin\tau)^2}.$$

Hier kann nun für $t=\tau$ eine Unstetigkeit eintreten; denn es wird in diesem Falle

$$f(re^{ti})=\frac{r^2-r\varrho}{(r-\varrho)^2}=\frac{r}{r-\varrho}$$

und folglich muss r von ϱ verschieden sein. Ganz ebenso verhält es sich mit $f'(re^{ti})$. Man sieht diess auch noch etwas kürzer auf folgende Weise. Die Funktion $\frac{z}{z-a}$ wird nur in dem einen Falle unstetig und zugleich unendlich, wo $z=a$ ist *), also für

$$r(\cos t+i\sin t)=\varrho(\cos\tau+i\sin\tau),$$

woraus folgt $r\cos t=\varrho\cos\tau$, $r\sin t=\varrho\sin\tau$ und mithin

$$t=\tau,\text{ oder }=\tau+2\pi,\ \tau+4\pi,\text{ etc.},$$
$$r=\varrho.$$

Das erste kann man nicht hindern, weil t ein völlig willkührlicher Winkel ist, dessen Allgemeinheit nicht beschränkt werden darf, dagegen kann man verhindern, dass $r=\varrho$ wird, indem man $r \gtrless \varrho$ setzt. Da nun $f(z)$ und $f'(z)$ stetig und endlich bleiben für $r<\varrho$ und dann wieder für $r>\varrho$, so ist im ersten Falle

$$M_r\left\{\frac{z}{z-a}\right\}=M_0\left\{\frac{z}{z-a}\right\}$$

und im zweiten

$$M_r\left\{\frac{z}{z-a}\right\}=M_\infty\left\{\frac{z}{z-a}\right\}.$$

Da ferner für jedes t und $r=0$ in unserer Funktion

$$f(re^{ti})=0$$

ist, so hat man auch $M_0\{f(z)\}=0$, folglich

---

*) Man hat nämlich für $z=a+\delta$, wo δ eine bis zur Gränze Null abnehmende Grösse bezeichnet,

$$\text{Lim}\frac{z}{z-a}=\text{Lim}\frac{a+\delta}{\delta}=+\infty$$

und für $z=a-\delta$

$$\text{Lim}\frac{z}{z-a}=\text{Lim}\frac{a-\delta}{-\delta}=-\infty.$$

$$M_r\left\{\frac{z}{z-a}\right\}=0\ ,\ r<\varrho. \tag{7}$$

Für $r=\infty$ ist dagegen

$$f(re^{ti})=$$

$$\operatorname{Lim}\frac{1-\frac{\varrho}{r}\cos(t-\tau)-i\frac{\varrho}{r}\sin(t-\tau)}{(\cos t-\frac{\varrho}{r}\cos\tau)^2+(\sin t-\frac{\varrho}{r}\sin\tau)^2}$$

wo sich das Zeichen Lim auf das unendliche Wachsen von r bezieht, oder

$$f(re^{ti})=\frac{1}{(\cos t)^2+(\sin t)^2}=1,$$

mithin

$$M_\infty\{f(z)\}=\operatorname{Lim}\frac{1+1+1+\ldots+1}{n}=1.$$

Hieraus folgt dann allgemein:

$$M_r\left\{\frac{z}{z-a}\right\}=1\ ,\ r>\varrho. \tag{8}$$

Man kann zu diesen Resultaten auch auf einem zweiten, jedoch weniger direkten Wege gelangen. Erinnert man sich nämlich an die Formeln

$$\frac{1}{1-u}=1+u+u^2+u^3+\ldots \tag{9}$$

$$\frac{u}{1-u}=u+u^2+u^3+u^4+\ldots \tag{10}$$

welche einzig und allein für $u<1$ gelten, so ist für $u=\frac{z}{a}$, also $z<a$

$$\frac{z}{z-a}=-\frac{\frac{z}{a}}{1-\frac{z}{a}}=-\frac{z}{a}-\frac{z^2}{a^2}-\frac{z^3}{a^3}-\ldots$$

und nun findet man die Mittelgänge sehr leicht, wenn man berücksichtigt, dass immer

$$M_r\{\varphi(z)+\psi(z)+\ldots\}=M_r\{\varphi(z)\}+M_r\{\psi(z)\}+\ldots$$

ist, wie man ohne alle Schwierigkeit aus der Definition der Mittelgränze ersieht. Es ergiebt sich so

$$M_r\left\{\frac{z}{z-a}\right\}=-\frac{1}{a}M_r\{z\}-\frac{1}{a^2}M_r\{z^2\}-\frac{1}{a^3}M_r\{z^3\}-\ldots$$

d. i. nach Formel (2) für $m = 1, 2, 3, \ldots$

$$M_r \left\{ \frac{z}{z-a} \right\}, \quad z < a.$$

Dagegen ist für $u = \frac{a}{z}$, wo nun $z > a$ sein muss,

$$\frac{z}{z-a} = \frac{1}{1-\frac{a}{z}} = 1 + \frac{a}{z} + \frac{a^2}{z^2} + \frac{a^3}{z^3} + \ldots$$

mithin

$$M_r \left\{ \frac{z}{z-a} \right\} = M_r\{1\} + aM_r \left\{ \frac{1}{z} \right\} + a^2 M_r \left\{ \frac{1}{z^2} \right\} + \ldots$$

oder unter Anwendung der Formel (5)

$$M_r \left\{ \frac{z}{z-a} \right\} = 1, \quad z > a.$$

Die Bedingungen $z < a$ und $z > a$ gehen aber für

$$z = r(\cos t + i \sin t), \quad a = \varrho(\cos \tau + i \sin \tau)$$

wegen des beliebigen τ in $r < \varrho$ und $r > \varrho$ über wie oben. Diese Ableitung setzt indessen voraus, dass die Gleichung (9) auch für imaginäre u in Anspruch genommen werden dürfe; diess lässt sich in der That rechtfertigen, wie sich im folgenden Paragraphen zeigen wird, wo wir den Gebrauch jener Formel nicht umgehen können.

IV. Um auch ein allgemeineres Beispiel zu haben, sei

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{z^m}$$

dabei $\varphi(z)$ eine Funktion, von der wir voraussetzen, dass sie selbst nebst ihren Differenzialquotienten bis zum $m$ten inclusive endlich und stetig bleibe, und dass für $z = 0$ die Funktionen $\varphi(z)$, $\varphi'(z)$, $\varphi''(z)$, $\ldots \varphi^{(m-1)}(z)$ sich sämmtlich annulliren. Fängt das Intervall, innerhalb deren die Funktion und ihre Differenzialquotienten stetig und endlich bleiben mit dem Werthe $z = 0$ oder $r = 0$ an, so ist

$$M_r \left\{ \frac{\varphi(z)}{z^m} \right\} = M_0 \left\{ \frac{\varphi(z)}{z^m} \right\} = \frac{\varphi(0)}{0^m}.$$

Da nun aber für $z = 0$ die Funktionen $\varphi(z)$, $\varphi'(z)$, $\varphi''(z)$, $\ldots \varphi^{(m-1)}(z)$ sämmtlich verschwinden, so ist für diesen Werth von z

$$\frac{\varphi(z)}{z^m} = \frac{\varphi'(z)}{mz^{m-1}} = \frac{\varphi''(z)}{m(m-1)z^{m-2}} \ldots = \frac{\varphi^{(m)}(z)}{m(m-1)\ldots 2.1}$$

indem man sich sehr leicht überzeugt, dass der zweite Beweis, welcher in §. 28. für die Regel gegeben wurde, nach der man den wahren Werth des vieldeutigen Quotienten $\frac{0}{0}$ aufsucht, ganz gleichförmig auch auf den Fall passt, in welchem die Variabele aus einer imaginären Gegend her bis zur Stelle Null gekommen ist. Man hat daher für $z=0$

$$\frac{\varphi(z)}{z^m} = \frac{\varphi^{(m)}(0)}{1.2.3\ldots m},$$

folglich wenn die Funktionen

$$\varphi(z)\ ,\ \varphi'(z)\ ,\ \varphi''(z)\ ,\ \ldots\ \varphi^{(m)}(z)$$

sämmtlich stetig und endlich bleiben für alle Werthe des Modulus von $r=0$ bis $r=r_1$

$$M_r \left\{ \frac{\varphi(z)}{z^m} \right\} = \frac{\varphi^{(m)}(0)}{1.2.3\ldots m}\ ,\ r_1 \geqq r \geqq 0. \tag{11}$$

Ist die ebenerwähnte Bedingung der Stetigkeit und Endlichkeit von $\varphi(z)$, $\varphi'(z)$, ... etc. nicht erfüllt, so darf man auch die Richtigkeit des gefundenen Theoremes nicht behaupten, weil die Regel zur Aufsuchung des wahren Werthes unbestimmt scheinender Quotienten sich auf die Voraussetzung stützt, dass die Funktionen im Zähler und Nenner nebst ihren Differenzialquotienten bis inclus. den ersten nicht verschwindenden stetig und endlich seien. Da nun in unserem Falle z^m sammt seinen Differenzialquotienten schon stetig und endlich ist, so bedarf es blos noch der vorhin ausgesprochenen Bedingung.

Nimmt man

$$\varphi(z) = F(z) - F(0) - \frac{z}{1}F'(0) - \frac{z^2}{1.2}F''(0) - \ldots - \frac{z^{m-1}}{1.2..(m-1)}F^{(m-1)}(0),$$

so wird, wie vorhin verlangt wurde,

$$\varphi(0) = 0\ ,\ \varphi'(0) = 0\ ,\ \varphi''(0) = 0\ ,\ \ldots\ \varphi^{(m-1)}(0) = 0$$

dagegen

$$\varphi^{(m)}(0) = F^{(m)}(0). \tag{12}$$

Da nun ferner leicht erhellt, dass der Ausdruck

$$F(0) + \frac{z}{1}F'(0) + \frac{z^2}{1.2}F''(0) + \ldots + \frac{z^{m-1}}{1.2..(m-1)}F^{(m-1)}(0),$$

welcher eine ganze rationale und algebraische Funktion von z darstellt, immer endlich und stetig ist, sobald nur nicht eine der Grössen $F(0)$,

$F'(0)$ etc. unendlich gross wird, so ist zur Stetigkeit und Endlichkeit von $\varphi(z)$, $\varphi'(z)$, $\varphi''(z) \ldots \varphi^{(m)}(z)$ weiter nichts als Stetigkeit und Endlichkeit von $F(z), F'(z), F''(z), \ldots F^{(m)}(z)$ nöthig. Alsdann ist nach no. (11) und (12)

$$M_r \left\{ \frac{F(z) - F(0) - \frac{z}{1} F'(0) - \ldots - \frac{z^{m-1}}{1.2..(m-1)} F^{(m-1)}(z)}{z^m} \right\}$$
$$= \frac{F^{(m)}(0)}{1.2\ldots m}.$$

Andererseits aber ist die linke Seite auch

$$= M_r \left\{ \frac{F(z)}{z^m} \right\} - F(0) M_r \left\{ \frac{1}{z^m} \right\} - \frac{F'(0)}{1} M_r \left\{ \frac{1}{z^{m-1}} \right\} - \ldots$$
$$\ldots - \frac{F^{(m-1)}(0)}{1.2\ldots(m-1)} M_r \left\{ \frac{1}{z} \right\}$$

d. i. nach no. (5), wenn $z > 0$ oder $r > 0$:

$$= M_r \left\{ \frac{F(z)}{z^m} \right\}. \tag{14}$$

Aus der Vergleichung der in no. (13) und (14) gefundenen Resultate ergiebt sich nun sogleich folgender Satz:

Bleiben die Funktionen

$$F(z)\ ,\ F'(z)\ ,\ F''(z)\ ,\ \ldots\ F^{(m)}(z)$$

endlich und stetig für alle Werthe des Modulus r, welche innerhalb des Intervalles $r=0$ bis $r=r_1$ liegen, so ist

$$M_r \left\{ \frac{F(z)}{z^m} \right\} = \frac{F^{(m)}(0)}{1.2\ldots m}\ ,\ r_1 > r > 0. \tag{15}$$

von welchem wir gleich nachher Gebrauch machen werden.

§. 40.

Allgemeines Kennzeichen für die Anwendbarkeit des Satzes von Mac Laurin.

Die wichtigste Anwendung, welche sich von der Theorie der Mittelgränzen machen lässt, besteht darin, dass man zeigen kann, wie jede gewissen Bedingungen Genüge leistende Funktion als Mittelgränze eines sehr einfachen Ausdruckes angesehen werden darf. Setzen wir nämlich in der Gleichung

$$M_r\{f(z)\} = f(0),$$

welche so lange gilt, als sich $f(z)$ und $f'(z)$ stetig ändern und nicht unendlich werden,

$$f(z) = z\,\frac{F(z)-F(a)}{z-a},$$

so ergiebt sich $f(0) = 0$ und also

$$M_r \left\{ z\,\frac{F(z)-F(a)}{z-a} \right\} = 0. \qquad (1)$$

Man übersieht aber leicht, dass so lange $F(z)$, $F'(z)$ und $F''(z)$ stetig und endlich bleiben, diess auch mit $f(z)$ und $f'(z)$ der Fall sein muss. Denn wenn bei dieser Voraussetzung eine Unstetigkeit in den Werthen von $f(z)$ eintreten sollte, so könnte diess nur für $z = a$ der Fall sein; aber für $z = a + \delta$, wo δ eine unbegränzt abnehmende Grösse bezeichnen möge, haben wir

$$f(a+\delta) = (a+\delta)\,\frac{F(a+\delta)-F(a)}{-\delta}$$

mithin

$$f(a) = -aF'(a);$$

also wird auch hier $f(a)$ noch nicht unendlich oder unstetig, vorausgesetzt, dass a noch in demjenigen Intervalle liegt, innerhalb dessen $F(z)$ und $F'(z)$ stetig und endlich bleiben. Ebenso hat man

$$f'(z) = z\,\frac{(z-a)\,F'(z)-[F(z)-F(a)]}{(z-a)^2} + \frac{F(z)-F(a)}{z-a}$$

und hier könnte ein Unendlich- oder Unstetigwerden nur in

$$\frac{(z-a)\,F'(z)-[F(z)-F(a)]}{(z-a)^2}$$

für $z = a$ vorkommen; der wahre Werth dieses Ausdrucks ist dann aber $\frac{1}{2}F''(a)$ und folglich findet keine Unterbrechung der Stetigkeit oder Endlichkeit Statt, sobald $F''(z)$ stetig und endlich ist für ein Intervall, welches a umfasst. Die Gleichung (1) gilt also für alle r, welche innerhalb desjenigen Intervalles liegen, in welchem $F(z)$, $F'(z)$ und $F''(z)$ stetig und endlich bleiben. Andererseits folgt aber aus (1)

$$M_r \left\{ \frac{zF(z)}{z-a} \right\} - M_r \left\{ \frac{zF(a)}{z-a} \right\} = 0$$

d. i.

$$M_r \left\{ \frac{zF(z)}{z-a} \right\} = F(a)\,M_r \left\{ \frac{z}{z-a} \right\}.$$

Wenden wir hier die unter no. (7) und (8) des vorigen Paragraphen gefundenen Formeln an, indem wir ϱ den Modulus von a nennen, so erhalten wir

$$M_r \left\{ \frac{zF(z)}{z-a} \right\} = 0 \text{ , } r < \varrho$$

und

$$M_r \left\{ \frac{zF(z)}{z-a} \right\} = F(a) \text{ , } r > \varrho \tag{2}$$

und hier ist die letztere Gleichung von besonderem Interesse, indem sie uns zeigt, dass jede Funktion einer beliebigen Grösse a als Mittelgränze eines gewissen Ausdrucks angesehen werden kann; nennen wir noch 0 und r_1 die Gränzen, innerhalb deren $F(z)$, $F'(z)$ und $F''(z)$ endlich und stetig bleiben, so sind die Bedingungen für die Gültigkeit von no. (2) noch schärfer ausgesprochen:

$$r_1 > r > \varrho > 0.$$

Um nun weiter gehen zu können, müssen wir uns zunächst versichern, dass wenn der Modulus von a kleiner als der von z ist, die Gleichung

$$\frac{z}{z-a} = \frac{1}{1-\frac{a}{z}} = 1 + \frac{a}{z} + \frac{a^2}{z^2} + \cdots, \tag{3}$$

welche ursprünglich nur für reelle a und z bekannt ist, ihre Gültigkeit behält. Substituiren wir für a und z ihre Werthe:

$$z = r(\cos t + i \sin t) \text{ , } a = \varrho(\cos\tau + i\sin\tau),$$

so wird

$$\frac{a}{z} = \frac{\varrho}{r} \cdot \frac{\cos\tau + i\sin\tau}{\cos t + i\sin t},$$

d. i., wenn man Zähler und Nenner mit $\cos t - i\sin t$ multiplizirt,

$$\frac{a}{z} = \frac{\varrho}{r}[\cos(\tau - t) + i\sin(\tau - t)], \tag{4}$$

wo wir zur Abkürzung

$$\frac{\varrho}{r} = q \text{ , } \tau - t = \Theta \tag{5}$$

setzen wollen. Ferner ist

$$\frac{z}{z-a} = \frac{r(\cos t + i\sin t)}{(r\cos t - \varrho\cos\tau) + i(r\sin t - \varrho\sin\tau)}$$

und wenn man Zähler wie Nenner mit

$$(r\cos t - \varrho\cos\tau) - i(r\sin t - \varrho\sin\tau)$$

multiplizirt:

$$\frac{z}{z-a} = \frac{r^2 - r\varrho\cos(\tau - t) + ir\varrho\sin(\tau - t)}{(r\cos t - \varrho\cos\tau)^2 + (r\sin t - \varrho\sin\tau)^2}.$$

Berücksichtigt man, dass der Nenner auch

$$= r^2 - 2r\varrho\cos(\tau - t) + \varrho^2$$

ist und dividirt Zähler und Nenner mit r^2, so kommt

$$\frac{z}{z-a} = \frac{1 - \frac{\varrho}{r}\cos(\tau - t) + i\frac{\varrho}{r}\sin(\tau - t)}{1 - 2\frac{\varrho}{r}\cos(\tau - t) + \left(\frac{\varrho}{r}\right)^2},$$

d. i. nach der in no. (5) eingeführten Bezeichnung

$$\frac{z}{z-a} = \frac{1 - q\cos\Theta + iq\sin\Theta}{1 - 2q\cos\Theta + q^2}.$$

Substituiren wir diess in no. (3) und bemerken, dass nach (4) und (5)

$$\frac{a}{z} = q(\cos\Theta + i\sin\Theta),$$

folglich

$$\frac{a^m}{z^m} = q^m(\cos m\Theta + i\sin m\Theta)$$

ist, so ergiebt sich

$$\frac{1 - q\cos\Theta + iq\sin\Theta}{1 - 2q\cos\Theta + q^2}$$
$$= 1 + q(\cos\Theta + i\sin\Theta) + q^2(\cos 2\Theta + i\sin 2\Theta)$$
$$+ q^3(\cos 3\Theta + i\sin 3\Theta) + \dots$$

oder durch Vergleichung der reellen und imaginären Partieen

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{1 - q\cos\Theta}{1 - 2q\cos\Theta + q^2} \\ = 1 + q\cos\Theta + q^2\cos 2\Theta + q^3\cos 3\Theta + \dots\end{array}\right\} \quad (6)$$

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{q\sin\Theta}{1 - 2q\cos\Theta + q^2} \\ = q\sin\Theta + q^2\sin 2\Theta + q^3\sin 3\Theta + \dots\end{array}\right\} \quad (7)$$

Wenn nun die Gleichung (3) für imaginäre a und z richtig bliebe unter der Voraussetzung, dass der Modulus ϱ von a kleiner als der Modulus r von z ist, so müssten die daraus abgeleiteten Gleichungen (6) und (7) für jedes beliebige Θ gelten, so lange $q = \frac{\varrho}{r}$ unter der Einheit

liegt. Dass dem in der That so sei, ergiebt sich auf folgende Weise.

Es bezeichne S_n die Summe der n Glieder enthaltenden Reihe

$$1+q\cos\Theta + q^2\cos 2\Theta + q^3\cos 3\Theta + \ldots + q^{n-1}\cos(n-1)\Theta. \quad (8)$$

Multipliziren wir dieselbe mit

$$1-2q\cos\Theta+q^2=(1+q^2)-2q\cos\Theta$$

und zerlegen jedes Produkt von der Form

$$2\cos m\Theta\cos\Theta$$

in die Cosinussumme

$$\cos(m-1)\Theta+\cos(m+1)\Theta,$$

so erhalten wir sehr leicht

$$\begin{aligned}
&(1-2q\cos\Theta+q^2)\,S_n \\
= &\quad 1+q^2 && -2q\cos\Theta \\
&+(1+q^2)\,q\cos\Theta && -q^2(1+\cos 2\Theta) \\
&+(1+q^2)\,q^2\cos 2\Theta && -q^3(\cos\Theta+\cos 3\Theta) \\
&+(1+q^2)\,q^3\cos 3\Theta && -q^4(\cos 2\Theta+\cos 4\Theta) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+(1+q^2)\,q^{n-1}\cos(n-1)\Theta && -q^n(\cos(n-2)\Theta+\cos n\Theta).
\end{aligned}$$

Nimmt man diese Grössen in vertikaler Richtung zusammen, so entstehen durch Auflösung der Paranthesen vier verschiedene Colonnen, deren Glieder sich, wie man sehr leicht übersieht, so weit heben, dass man übrig behält

$$\begin{aligned}
&(1-2q\cos\Theta+q^2)\,S_n \\
&=1-q\cos\Theta+q^{n+1}\cos(n-1)\,\Theta-q^n\cos n\Theta,
\end{aligned}$$

woraus sich sehr leicht ergiebt:

$$S_n=\frac{1-q\cos\Theta}{1-2q\cos\Theta+q^2}+\frac{q\cos(n-1)\Theta-\cos n\Theta}{1-2q\cos\Theta+q^2}\,q^n. \quad (9)$$

Die Reihe in (6) geht aber aus der in (8) hervor, wenn man in der letzteren die Gliederanzahl n ins Unendliche wachsen lässt; wir müssen daher den Gränzwerth des Ausdruckes in (9) für unausgesetzt zunehmende n aufsuchen, wobei es blos auf den Gränzwerth von

$$\frac{q\cos(n-1)\Theta-\cos n\Theta}{1-2q\cos\Theta+q^2}\,q^n \quad (10)$$

ankommt, da das erste auf der rechten Seite in (9) stehende Glied von n gar nicht abhängt. Bei wachsenden n oszilliren nun die Cosinus von $(n-1)\Theta$ und $n\Theta$ immer zwischen $+1$ und -1 hin und her und der

Zähler in no. (10) erhält offenbar seinen grössten Werth, wenn $\cos(n-1)\Theta = +1$, $\cos n\Theta = -1$ ist, woraus folgt, dass, wie gross auch n sein möge, der fragliche Quotient die Grösse

$$\frac{q+1}{1-2q\cos\Theta+q^2}q^n$$

nicht übersteigen kann. Da nun aber für $q<1$ die Potenz q^n kleiner als jede angebbare Grösse gemacht werden kann, so folgt

$$\text{Lim}\frac{q+1}{1-2q\cos\Theta+q^2}q^n=0$$

und um so mehr

$$\text{Lim}\frac{q\cos(n-1)\Theta-\cos n\Theta}{1-2q\cos\Theta+q^2}q^n=0,$$

folglich durch Substitution dieses Werthes in no. (9):

$$\text{Lim}\,S_n=\frac{1-q\cos\Theta}{1-2q\cos\Theta+q^2},\ q<1$$

und diess ist in der That nichts Anderes als die Gleichung (6), weil jetzt Lim S_n die Summe der ins Unendliche fortgesetzten Reihe (8) bedeutet.

Durch ein völlig analoges Verfahren überzeugt man sich von der Richtigkeit der Gleichung (7). Man setzt nämlich

$$S_n=q\sin\Theta+q^2\sin 2\Theta+q^3\sin 3\Theta+\ldots+q^{n-1}\sin(n-1)\Theta,$$

multiplizirt beiderseits mit

$$1-2q\cos\Theta+q^2=(1+q^2)-2q\cos\Theta$$

und zerlegt rechts jedes Produkt von der Form

$$2\sin m\Theta\cos\Theta$$

in die Sinussumme

$$\sin(m-1)\Theta+\sin(m+1)\Theta.$$

Auf diese Weise findet man ohne Schwierigkeit

$$\begin{aligned}&(1-2q\cos\Theta+q^2)S_n\\&=q\sin\Theta+q^{n+1}\sin(n-1)\Theta-q^n\sin n\Theta\end{aligned}$$

oder

$$S_n=\frac{q\sin\Theta}{1-2q\cos\Theta+q^2}+\frac{q\sin(n-1)\Theta-\sin n\Theta}{1-2q\cos\Theta+q^2}q^n$$

und mittelst Ueberganges zur Gränze für unausgesetzt wachsende n für $q<1$

$$\text{Lim}\, S_n = \frac{q \sin \Theta}{1 - 2q \cos \Theta + q^2},\ q < 1,$$

was mit der Gleichung (7) zusammenfällt.

Addirt man nun die Gleichungen (6) und (7), deren Richtigkeit wir so erkannt haben, nachdem man die letztere mit $i = \sqrt{-1}$ multiplizirt hat, wendet rückwärts die Substitutionen in no. (5) an und setzt am Ende

$$r(\cos t + i \sin t) = z\ ,\ \varrho(\cos \tau + i \sin \tau) = a,$$

so kommt man auf die Gleichung (3) zurück und hat damit ihre Gültigkeit für $\varrho < r$ bewiesen. Hiervon lässt sich nun eine wichtige Anwendung auf die Gleichung (2) machen; durch Substitution von (3) in (2) wird nämlich

$$F(a) = M_r \left\{ F(z) + a \frac{F(z)}{z} + a^2 \frac{F(z)}{z^2} + a^3 \frac{F(z)}{z^3} + \ldots \right\}$$

oder auch

$$\left. F(a) = M_r\{F(z)\} + aM_r \left\{\frac{F(z)}{z}\right\} + a^2 M_r \left\{\frac{F(z)}{z^2}\right\} + \ldots \right\} r > \varrho. \quad (11)$$

Erinnert man sich nun, dass die Mittelgränze einer jeden Funktion eine constante Grösse ist, so erkennt man in der vorliegenden Gleichung eine Formel, welche zur Verwandlung einer Funktion $F(a)$ in eine nach steigenden Potenzen von a fortgehende Reihe dient. Es fragt sich nun blos noch, unter welchen Bedingungen die Coeffizienten dieser Potenzen, nämlich die Mittelgränzen

$$M_r\{F(z)\}\ ,\ M_r \left\{\frac{F(z)}{z}\right\}\ ,\ M_r \left\{\frac{F(z)}{z^2}\right\}\ ,\ \ldots .$$

endliche Grössen werden, weil sich sonst das erhaltene Resultat unter die nichtssagende Form $F(a) = \infty \pm \infty \pm \infty$ etc. stellen würde. Hierauf antwortet uns die Gleichung (15) des vorigen Paragraphen, wonach

$$M_r \left\{\frac{F(z)}{z^m}\right\} = \frac{F^{(m)}(0)}{1.2.3\ldots m},\ r_1 > r > 0$$

ist, sobald $F(z), F'(z), F''(z), \ldots F^{(m)}(z)$ endlich und stetig bleiben innerhalb eines gewissen Intervalles $r = 0$ bis $r = r_1$. Bringen wir diesen Satz für $m = 0, 1, 2, 3$, in inf. in Anwendung, so ergiebt sich aus no. (11):

$$F(a) = F(0) + a\frac{F'(0)}{1} + a^2\frac{F''(0)}{1.2} + \dots \quad \left.\begin{matrix} \\ r_1 > r > \varrho > 0 \end{matrix}\right\} \quad (12)$$

wobei die Funktionen

$$F(z)\ ,\ F'(z)\ ,\ F''(z)\ ,\ F'''(z)\ ,\ \dots \text{ in inf.}$$

endlich und stetig bleiben müssen von $r = 0$ bis $r = r_1$. Wenn man nun berücksichtigt, dass die gefundene Reihe mit der im Mac Laurinschen Satze vorkommenden identisch ist, so ergiebt sich folgendes wichtige Theorem:

> Wenn eine Funktion $F(z)$ so beschaffen ist, dass sich für $z = r(\cos t + \sqrt{-1} \sin t)$ ein Intervall $r=0$ bis $r = r_1$ angeben lässt, innerhalb dessen bei beliebigen t und $r_1 > r > 0$ die genannte Funktion nebst allen ihren Differenzialquotienten ins Unendliche hinab stetig und endlich bleibt, so lässt sich dieselbe für alle diejenigen Werthe $x = \varrho(\cos \tau + \sqrt{-1} \sin \tau)$ in eine Reihe von der Form
>
> $$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \dots$$
>
> verwandeln, deren Modulus ϱ innerhalb jenes Intervalles 0 bis r_1 liegt und deren Argument τ beliebig ist; die erwähnte Reihe fällt mit der im Theoreme von Mac Laurin vorkommenden zusammen.

Das so eben ausgesprochene allgemeine Criterium für die Anwendbarkeit des Mac Laurinschen Theoremes gehört unter die Sätze, welche sich leichter vermuthen als beweisen lassen. Dass man in der That Grund genug hat, einen derartigen Satz als Fundamentaltheorem für die Theorie der nach steigenden Potenzen einer Variabelen fortgehenden Reihen zu vermuthen, möge folgendes wohl nicht überflüssige Raisonnement darthun. — Wer verlangt, dass $F(x)$ als Summe einer Reihe von der Form $A + Bx + Cx^2 +$ etc. erscheinen solle und demgemäss hypothetisch die Gleichung

$$F(x) = A + Bx + Cx^2 + \dots \tag{13}$$

aufstellt, der schreibt offenbar der Funktion dieselben Eigenschaften zu wie der Reihe, denn sonst wäre eine Gleichung zwischen beiden eine vollendete Absurdität. Welche sind denn nun aber die Eigenschaften der Reihe? Es ist nicht schwer, deren wenigstens einige zu

entdecken. Bezeichnen wir die Reihe kurz mit $\Phi(x)$ und setzen x als reell voraus, so erhellt zunächst sehr leicht, dass $\Phi(x)$ eine stetige Funktion von x sein muss und das Nämliche gilt auch von den Differenzialquotienten $\Phi'(x)$, $\Phi''(x)$ etc. Soll nun eine beliebige Funktion $F(x)$ der Reihe $\Phi(x)$ gleich sein, so kann dies offenbar nur so lange geschehen, als auch $F(x)$, $F'(x)$, $F''(x)$ etc. immer stetig bleiben. Würde dagegen eine dieser Funktionen an irgend einer Stelle $x=\xi$ discontinuirlich, so kann für $x>\xi$ offenbar gar keine Gleichung zwischen $F(x)$ und $\Phi(x)$ mehr bestehen, wenn sie vorher, d. h. für $x<\xi$, bestanden hat. Das Verlangen nach einer solchen würde mit der geometrischen Forderung eine stetige und eine unstetige Curve durchweg zur Deckung zu bringen, auf ganz gleicher Linie stehen. Wären ferner die Constanten A, B, C etc. sämmtlich positiv, so würde $\Phi(x)$ desto grösser sein, je mehr x betrüge, also $\Phi(x)$ eine von $x=0$ bis $x=\infty$ beständig zunehmende Funktion bilden. Daraus folgt denn wieder, dass zwischen $F(x)$ und $\Phi(x)$ für alle x nur dann eine Gleichung bestehen kann, wenn $F(x)$ ebenfalls eine durchweg wachsende Funktion ist; nähme dagegen $F(x)$ zu von $x=0$ etwa bis $x=\xi'$, aber ab sobald $x>\xi'$ geworden ist, so könnten $F(x)$ und $\Phi(x)$ höchstens für die in dem Intervalle $x=0$ bis $x=\xi'$ enthaltenen x gleich sein, und wäre diess der Fall, so kann für $x>\xi$ ganz sicher keine Gleichung zwischen $F(x)$ und der Reihe mehr statt finden. Diess lässt sich noch bestimmter an einzelnen Beispielen nachweisen. Gesetzt z. B. wir hätten gefunden:

$$(1-x)^{\frac{2}{3}}=1-\frac{2}{3}x-\frac{2.1}{3.6}x^2-\frac{2.1.4}{3.6.9}x^3-\dots \qquad (14)$$

ohne zu wissen wie weit diese Gleichung gilt, so lässt sich sogleich die Gränze angeben, über welche hinaus die Gültigkeit derselben sich nicht erstrecken kann. Es folgt nämlich durch Differenziation

$$\frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{3}}}=1+\frac{1}{3}x+\frac{1.4}{3.6}x^2+\dots,$$

da nun hier für $x=1$ eine Unstetigkeit eintritt, in so fern die linke Seite die zwei Werthe $+\infty$ oder $-\infty$ hat, jenachdem $x=\text{Lim}\,(1-\delta)$ oder $=\text{Lim}\,(1+\delta)$ ist, so folgt, dass wenn die Gleichung von $x=0$ bis $x=1$ besteht (und das wissen wir nach dem Früheren), sie über 1 hinaus keinen Bestand mehr haben kann. Das Nämliche gilt dann auch von der Gleichung (14). Ebenso könnte man das zweite der ge-

gebenen Criterien anwenden, indem man die Gleichung (14) in folgender Form darstellt:

$$1-\sqrt[3]{(1-x)^2}=\frac{2}{3}x+\frac{2.1}{3.6}x^2+\frac{2.1.4}{3.6.9}x^2+\ldots \qquad (15)$$

Da nun die Reihe lauter positive Grössen enthält, so bildet sie für positive wachsende x eine zunehmende Funktion; diess ist aber mit der Funktion auf der linken Seite nicht der Fall; letztere nimmt zu von $x=0$ bis $x=1$, wo sie ihr Maximum 1 erreicht und sobald $x>1$ ist, findet eine continuirliche Abnahme in ihr statt. Die Gleichung (15) kann also bei positiven x höchstens von $x=0$ bis $x=1$ gelten.

Wenn nun aus diesen Betrachtungen ganz sicher hervorgeht, dass die Funktion $F(x)$ nur dann mittelst des Mac Laurinschen Theoremes verwandelt werden **kann**, wenn sie gewissen Bedingungen genügt, so fragt es sich immer noch, ob sie, wenn diess letztere der Fall ist, sich verwandeln lassen **muss**, oder mit anderen Worten: unser Raisonnement giebt zwar die Nothwendigkeit gewisser Bedingungen an, aber es handelt sich nicht um blos nothwendige Bedingungen, sondern um solche, die zugleich **nothwendig** und **hinreichend** sind. Diese letzteren nun haben wir durch das vorhergehende Theorem kennen gelernt und zwar in der wünschenswerthen Ausdehnung auf nicht blos reelle Werthe der Variabelen.

§. 42.

Beispiele zum Theoreme des vorigen Paragraphen.

Der grosse Vortheil, welchen das im vorigen Paragraphen ausgesprochene Criterium für die Anwendung des Theoremes von Mac Laurin darbietet, besteht darin, dass man sich die oft sehr umständliche Betrachtung über den Gränzwerth der Grösse R_n in §. 37. völlig ersparen und zugleich die gewonnenen Resultate auf imaginäre Werthe der Veränderlichen x ausdehnen kann. Einige Beispiele mögen diess zeigen.

I. Sei zuerst $F(x)=(1+x)^\mu$, so haben wir zwei Fälle zu unterscheiden, ob nämlich μ ganz und positiv ist oder nicht. Im ersten Falle sind auch $F'(x)$, $F''(x)$ etc. Potenzen mit ganzen positiven Exponenten, von denen jeder nächstfolgende um eine Einheit kleiner als der vorhergehende ist; es kommt daher unter diesen Funktionen eine

vor, welche sich auf eine blose Constante reduzirt, während alle nachherigen der Null gleich sind. Da nun keine der Funktionen $F(z)$, $F'(z)$, $F''(z)$ etc. eine Potenz mit negativem Exponenten darstellt, so kann für ein endliches bestimmtes x niemals ein Unstetig- oder Unendlichwerden irgend einer jener Funktionen eintreten und daher gilt die für $(1+x)^\mu$ gefundene Reihe ganz allgemein bei beliebigen x, wenn μ ganz und positiv ist. Anders dagegen wird die Sache für nicht ganze positive μ. Dann haben wir für $F^{(n)}(x)$ die Formel

$$\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1)(1+x)^{\mu-n}$$

und da man n so gross nehmen darf als man will, so kann man auch $n>\mu$ machen, wodurch

$$F^{(n)}(x)=\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots\ldots(\mu-n+1)\frac{1}{(1+x)^{n-\mu}}$$

wird. Hier kann nun allerdings eine Unterbrechung der Continuität eintreten, sobald nämlich $x=-1$ oder, wenn $x=r(\cos t+i\sin t)$ genommen wird, $r=1$, $t=\pi$ ist. Es muss folglich der Modulus von x kleiner als der Modulus $r_1=1$ sein, für welchen die Unstetigkeit und hier auch gleichzeitig die Unendlichkeit von $F^{(n)}(x)$ zum Vorschein kommt. — Diess Alles zusammen giebt den Satz:

Die Gleichung

$$(1+x)^\mu=1+\frac{\mu}{1}x+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2+\ldots. \tag{1}$$

gilt für alle x wenn μ positiv und ganz ist, ausserdem nur für solche x, deren Modulus unter der Einheit liegt.

Für reelle x kommen wir hiermit auf das Frühere zurück; bei imaginären x, etwa

$$x=\varrho(\cos\tau+i\sin\tau),$$

darf demnach τ beliebig sein, wenn $\varrho<1$ ist. Diese letztere Substitution giebt zu einer eleganten Transformation Veranlassung. Setzen wir nämlich um kurz zu sein

$$\frac{\mu}{1}=\mu_1,\ \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}=\mu_2,\ \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}=\mu_3 \text{ etc.},$$

so ist jetzt

$$\begin{aligned}&[1+\varrho(\cos\tau+i\sin\tau)]^\mu\\ &=1+\mu_1\varrho(\cos\tau+i\sin\tau)+\mu_2\varrho^2(\cos2\tau+i\sin2\tau)\\ &\quad+\mu_3\varrho^3(\cos3\tau+i\sin3\tau)+\ldots.\end{aligned} \tag{2}$$

Setzen wir dagegen

$$1+\varrho(\cos\tau+i\sin\tau)=R(\cos T+i\sin T),$$

so folgt

$$R\cos T=1+\varrho\cos\tau\,,\ R\sin T=\varrho\sin\tau,$$

und

$$(R\cos T)^2+(R\sin T)^2=1+2\varrho\cos\tau+\varrho^2,$$

$$R=(1+2\varrho\cos\tau+\varrho^2)^{\frac{1}{2}},\qquad(3)$$

$$\frac{R\sin T}{R\cos T}=\tan T=\frac{\varrho\sin\tau}{1+\varrho\cos\tau}$$

mithin

$$T=\mathrm{Arctan}\,\frac{\varrho\sin\tau}{1+\varrho\cos\tau}+k\pi,\qquad(4)$$

wo, wie immer, Arctan den kleinsten aller zu einer gegebenen Tangente gehörigen Bögen und k eine positive ganze Zahl bezeichnet. Für die so bestimmten Werthe von R und T ist nun

$$\begin{aligned}[1+\varrho(\cos\tau+i\sin\tau)]^\mu&=R^\mu(\cos T+i\sin T)^\mu\\&=R^\mu(\cos\mu T+i\sin\mu T),\end{aligned}\qquad(5)$$

indem man sich leicht überzeugen kann, dass die Formel

$$(\cos\Theta+i\sin\Theta)^m=\cos m\Theta+i\sin m\Theta,$$

welche wir in der Einleitung für blos ganze positive m gelten sahen, auch für jedes andere reelle μ gilt *). Durch Vergleichung der reellen und imaginären Partieen in (2) und (5) ergiebt sich jetzt:

---

*) Sind nämlich p und q beliebige positive ganze Zahlen, so ist

$$\left(\cos\frac{p}{q}\Theta+i\sin\frac{p}{q}\Theta\right)^q=\cos p\Theta+i\sin p\Theta=(\cos\Theta+i\sin\Theta)^p$$

folglich durch beiderseitige Ausziehung der $q$ten Wurzel

$$\cos\frac{p}{q}\Theta+i\sin\frac{p}{q}=(\cos\Theta+i\sin\Theta)^{\frac{p}{q}},$$

was umgekehrt geschrieben den Beweis liefert, dass die oben erwähnte Formel auch dann gilt, wenn m ein beliebiger positiver Bruch $\frac{p}{q}$ ist. Wäre ferner m eine positive Irrationalzahl, so kann man sich dieselbe als Gränzwerth eines rationalen Bruches $\frac{p}{q}$ (etwa Dezimalbruches) denken, indem man sich p und q stetig ändern lässt. Für $\mathrm{Lim}\,\frac{p}{q}=m$ beweist man hierdurch die Gül-

$$R^\mu \cos \mu T = 1 + \mu_1 \varrho \cos \tau + \mu_2 \varrho^2 \cos 2\tau + \ldots. \qquad (6)$$
$$R^\mu \sin \mu T = \mu_1 \varrho \sin \tau + \mu_2 \varrho^2 \sin 2\tau + \ldots.$$

Die ganze Zahl k, welche vorhin noch unbestimmt blieb, lässt sich jetzt leicht bestimmen; für $\varrho = 0$ wird nämlich $R = 1$, $T = k\pi$, folglich nach no. (6)

$$\cos \mu k\pi = 1.$$

Da aber μ eine ganz beliebige Grösse bedeutet, so kann diese Gleichung nur bestehen wenn $k = 0$ ist. Vermöge der Werthe von R und T ergiebt sich dann

$$(1 + 2\varrho \cos \tau + \varrho^2)^{\frac{1}{2}\mu} \cos\left(\mu \operatorname{Arctan} \frac{\varrho \sin \tau}{1 + \varrho \cos \tau}\right)$$
$$= 1 + \mu_1 \varrho \cos \tau + \mu_2 \varrho^2 \cos 2\tau + \mu_3 \varrho^3 \cos 3\tau + \ldots. \qquad (7)$$

und

$$(1 + 2\varrho \cos \tau + \varrho^2)^{\frac{1}{2}\mu} \sin\left(\mu \operatorname{Arctan} \frac{\varrho \sin \tau}{1 + \varrho \cos \tau}\right)$$
$$= \mu_1 \varrho \sin \tau + \mu_2 \varrho^2 \sin 2\tau + \mu_3 \varrho^3 \sin 3\tau + \ldots. \qquad (8)$$

und diese Gleichungen gelten für ganz beliebige ϱ, sobald μ eine positive ganze Zahl darstellt, ausserdem nur für $\varrho < 1$.

II. Sei ferner $F(x) = l(1 + x)$, also

$$F^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} 1.2..(n-1)}{(1+x)^n},$$

so giebt es für x einen Modulus, bei welchem $F^{(n)}(x)$ unstetig und zu gleicher Zeit unendlich wird, wenn man nämlich $x = r(\cos t + i \sin t)$, $t = \pi$, $r = 1$ also $x = -1$ setzt. Die Reihe für den Logarithmus von $1 + x$ gilt demnach nur so lange, als der Modulus von x unter der Einheit liegt. Bei reellen x kommen wir hiermit auf das Frühere zu-

---

tigkeit des Satzes für irrationale positive m. Aus diesem Allen erhellt, dass derselbe für jedes **positive** m gilt. Man hat nun weiter

$$\frac{1}{(\cos\Theta + i\sin\Theta)^m} = \frac{1}{\cos m\Theta + i \sin m\Theta} = \cos m\Theta - i \sin m\Theta$$
$$= \cos(-m)\Theta + i \sin(-m)\Theta,$$

d. i.

$$(\cos\Theta + i \sin\Theta)^{(-m)} = \cos(-m)\Theta + i\sin(-m)\Theta,$$

woraus man ersieht, dass der Satz für jedes negative m gilt, wenn er für jedes positive m richtig ist; nach dem Vorigen folgt jetzt die allgemeine Gültigkeit desselben.

rück; bei imaginären x also $x = \varrho(\cos\tau + i\sin\tau)$ wird

$$l[1 + \varrho(\cos\tau + i\sin\tau)]$$
$$= \tfrac{1}{1}\varrho(\cos\tau + i\sin\tau) - \tfrac{1}{2}\varrho^2(\cos 2\tau + i\sin 2\tau) + \tfrac{1}{3}\varrho^3(\cos 3\tau + i\sin 3\tau) - \ldots,$$

und wenn man links die Formel

$$l(\alpha + \beta i) = \tfrac{1}{2} l(\alpha^2 + \beta^2) + i \operatorname{Arctan}\frac{\beta}{\alpha}$$

für $\alpha = 1 + \varrho\cos\tau$, $\beta = \varrho\sin\tau$ anwendet, so findet man durch Vergleichung der reellen und imaginären Partieen

$$\left.\begin{aligned} &\tfrac{1}{2} l(1 + 2\varrho\cos\tau + \varrho^2) \\ &= \tfrac{1}{1}\varrho\cos\tau - \tfrac{1}{2}\varrho^2\cos 2\tau + \tfrac{1}{3}\varrho^3\cos 3\tau - \ldots \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{Arctan}\frac{\varrho\sin\tau}{1 + \varrho\cos\tau} \\ &= \tfrac{1}{1}\varrho\sin\tau - \tfrac{1}{2}\varrho^2\sin 2\tau + \tfrac{1}{3}\varrho^3\sin 3\tau - \ldots, \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

wobei immer $\varrho < 1$ sein muss. Für $\tau = \frac{\pi}{2}$ giebt die letztere Formel noch das bewerkenswerthe Resultat:

$$\operatorname{Arctan}\varrho = \tfrac{1}{1}\varrho - \tfrac{1}{3}\varrho^3 + \tfrac{1}{5}\varrho^5 - \ldots, \quad (11)$$

auf welches wir bald zurückkommen werden.

III. Für $F(x) = e^x$ wird $F^{(n)}(x)$ ebenfalls $= e^x$; ferner ist für imaginäre x etwa $x = u + vi$

$$e^x = e^u(\cos u + i\sin u)$$

und da nun e^u, $\cos u$ und $\sin u$ durchweg stetige Funktionen sind, so folgt, dass $F(x)$, $F'(x)$, $F''(x)$ etc. für alle x stetig und endlich bleiben, dass mithin die Reihe für e^x ohne alle Einschränkung gilt. Nimmt man wieder $x = \varrho(\cos\tau + i\sin\tau)$, so wird

$$e^{\varrho(\cos\tau + i\sin\tau)}$$
$$= 1 + \frac{\varrho(\cos\tau + i\sin\tau)}{1} + \frac{\varrho^2(\cos 2\tau + i\sin 2\tau)}{1.2} + \frac{\varrho^3(\cos 3\tau + i\sin 3\tau)}{1.2.3} + \ldots$$

und wenn man berücksichtigt, dass

$$e^{\varrho\cos\tau + i\varrho\sin\tau} = e^{\varrho\cos\tau}[\cos(\varrho\sin\tau) + i\sin(\varrho\sin\tau)]$$

ist, durch Vergleichung des Reellen und Imaginären beiderseits:

$$\left.\begin{aligned}&e^{\varrho\cos\tau}\cos(\varrho\sin\tau)\\&=1+\frac{\varrho\cos\tau}{1}+\frac{\varrho^2\cos2\tau}{1.2}+\frac{\varrho^3\cos3\tau}{1.2.3}+\ldots,\end{aligned}\right\}\quad(12)$$

$$\left.\begin{aligned}&e^{\varrho\cos\tau}\sin(\varrho\sin\tau)\\&=\frac{\varrho\sin\tau}{1}+\frac{\varrho^2\sin2\tau}{1.2}+\frac{\varrho^3\sin3\tau}{1.2.3}+\ldots.\end{aligned}\right\}\quad(13)$$

gültig für jedes beliebige ϱ. Nimmt man noch $\tau=\frac{\pi}{2}$, so ergiebt sich

$$\cos\varrho=1-\frac{\varrho^2}{1.2}+\frac{\varrho^4}{1.2.3.4}-\frac{\varrho^6}{1.2\ldots6}+\ldots.$$

$$\sin\varrho=\frac{\varrho}{1}-\frac{\varrho^3}{1.2.3}+\frac{\varrho^5}{1.2.3.4.5}-\ldots.,$$

wie wir ebenfalls schon auf anderem Wege gefunden haben.

Auf ganz gleiche Weise würde man sich überzeugen, dass die für $\cos x$ und $\sin x$ entwickelten Reihen für jeden beliebigen Werth von x den genannten Funktionen gleich gelten, wobei wir uns aber nicht aufhalten wollen, da diese Betrachtung zu keinen wesentlich neuen Resultaten führt. Wichtiger dagegen ist die Anwendung des Mac Laurinschen Satzes auf einige zusammengesetztere Funktionen, wobei wir noch die Reihen für $\tan x$, $\cot x$, $\operatorname{cosec} x$, $\sec x$, $\operatorname{Arcsin} x$ und $\operatorname{Arctan} x$ kennen lernen werden.

§. 43.

Anwendung des Mac Laurinschen Theoremes auf Funktionen von Exponenzialgrössen.

Da sich das Mac Laurinsche Theorem auf jede Funktion anwenden lässt, deren höhere Differenzialquotienten durch eine independente Formel dargestellt werden können, so liegt der Gedanke sehr nahe, auch die zusammengesetzteren Funktionen, deren Differenzialquotienten wir früher aufgesucht haben, in dieser Rücksicht zu betrachten und wir wenden uns daher zunächst an die aus Exponenzialgrössen zusammengesetzten Funktionen.

I. Sei zunächst

$$F(x)=\frac{1}{e^x+1},$$

so haben wir nach §. 21. Formel (4).

$$-F^{(n)}(x)=\overset{n}{J}_1\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)-\overset{n}{J}_2\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)^2+\overset{n}{J}_3\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)^3-\ldots$$
$$+(-1)^n\overset{n}{J}_{n+1}\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)^{n+1},$$

wobei für irgend ein ganzes positives p die Coeffizienten mittelst der Formel

$$\overset{n}{J}_p=p^n-(p-1)_1(p-1)^n+(p-1)_2(p-2)^n-(p-1)_3(p-3)^n+\ldots \quad (1)$$

bestimmt werden. Hieraus folgt nun

$$-F^{(n)}(0)=\frac{1}{2}\overset{n}{J}_1-\frac{1}{2^2}\overset{n}{J}_2+\frac{1}{2^3}\overset{n}{J}_3-\ldots+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\overset{n}{J}_{n+1}$$

und wenn wir zur Abkürzung

$$\frac{1}{2}\overset{n}{J}_1-\frac{1}{2^2}\overset{n}{J}_2+\frac{1}{2^3}\overset{n}{J}_3-\ldots+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\overset{n}{J}_{n+1}=A_n \quad (2)$$

setzen, wo nun A_n eine völlig bekannte Grösse ist,

$$F^{(n)}(0)=-A_n.$$

Nach der Mac Laurinschen Formel ergiebt sich nun sogleich

$$\frac{1}{e^x+1}=\frac{1}{2}-\frac{A_1x}{1}-\frac{A_2x^2}{1.2}-\frac{A_3x^3}{1.2.3}-\ldots. \quad (3)$$

Ohne aber die Werthe von A_1, A_2 etc. zu berechnen, kann man schon im Voraus leicht absehen, dass A_2, A_4, A_6 etc. sämmtlich der Null gleich sind. Aus der obigen Formel kann man nämlich noch die folgende ableiten:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{e^x-1}{e^x+1}=\frac{A_1x}{1}+\frac{A_2x^2}{1.2}+\frac{A_3x^3}{1.2.3}+\ldots.$$

und ebenso für negative x

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=-\frac{A_1x}{1}+\frac{A_2x^2}{1.2}-\frac{A_3x^3}{1.2.3}+\ldots.$$

Nun ist aber

$$\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=\frac{1-e^x}{1+e^x}=-\frac{e^x-1}{e^x+1},$$

folglich muss auch

$$-\frac{A_1x}{1}+\frac{A_2x^2}{1.2}-\frac{A_3x^3}{1.2.3}+\ldots.$$
$$=-\left\{\frac{A_1x}{1}+\frac{A_2x^2}{1.2}+\frac{A_3x^3}{1.2.3}+\ldots\right\}$$

sein und diese Gleichung reduzirt sich auf die folgenden:

$$-A_1=-A_1\,,\ +A_2=-A_2\,,\ -A_3=-A_3\,,\ +A_4=-A_4\,,\ \text{etc.}$$

oder

$$A_2=0\,,\ A_4=0\,,\ A_6=0\,,\ldots$$

Berechnet man die Werthe der übrig bleibenden Grössen A_1, A_3, A_5, ..., so findet man einen Zeichenwechsel in ihnen, nämlich $A_1=\frac{1}{4}$, $A_3=-\frac{1}{8}$ etc und daher ist es vortheilhafter auf folgende Weise zu bezeichnen:

$$C_n=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left\{\frac{1}{2}\overset{n}{J}_1-\frac{1}{2^2}\overset{n}{J}_2+\ldots+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\overset{n}{J}_{n+1}\right\} \tag{4}$$

so dass

$$A_n=(-1)^{\frac{n-1}{2}}C_n$$

wird, wobei n immer ungerade ist. Bei dieser Bezeichnungsweise und unter Weglassung der Grössen A_2, A_4, A_6 etc. stellt sich die Gleichung (3) in folgende Form:

$$\frac{1}{e^x+1}=\frac{1}{2}-\frac{C_1x}{1}+\frac{C_3x^3}{1.2.3}-\frac{C_5x^5}{1.2.3.4.5}+\ldots. \tag{5}$$

Es ist nicht schwer, die Gränzen für die Gültigkeit dieser Gleichung anzugeben. Die Funktion auf der linken Seite bleibt nämlich so lange endlich und stetig als der Nenner nicht Null wird, was für $x=\pi\sqrt{-1}$ eintritt. Es muss folglich der jedesmalige Modulus von x kleiner als π sein.

Zur Berechnung der mit C bezeichneten Grössen kann man übrigens noch eine andere Formel aufstellen, wenn man sich erinnert, dass zufolge des §. 21. auch folgende Gleichung gilt:

$$D^n\left(\frac{1}{e^x+1}\right)$$

$$=-\frac{\overset{n}{L}_1e^x-\overset{n}{L}_2e^{2x}+\overset{n}{L}_3e^{3x}-\ldots.+(-1)^{n-1}\overset{n}{L}_ne^{nx}}{(e^x+1)^{n+1}},$$

worin für ein ganzes positives p

$$\overset{n}{L}_p=p^n-(n+1)_1(p-1)^n+(n+1)_2(p-2)^n-\ldots \tag{6}$$

ist. Es folgt dann, weil $F^{(n)}(0)=-A_n$ war, für $x=0$

$$A_n=\frac{1}{2^{n+1}}\{\overset{n}{L}_1-\overset{n}{L}_2+\overset{n}{L}_3-\ldots.+(-1)^{n-1}\overset{n}{L}_n\}$$

und nach der Relation zwischen A_n und C_n für ein ungerades n:

$$C_n = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2^{n+1}} \{ \overset{n}{L}_1 - \overset{n}{L}_2 + \overset{n}{L}_3 - \dots + (-1)^{n-1} \overset{n}{L}_n \} \qquad (7)$$

und man wird nun zur Berechnung von C_n diejenige der Formeln (4) und (7) benutzen, bei welcher der Calcül am bequemsten ist.

II. Wollte man das Mac Laurinsche Theorem auf die analoge Funktion

$$\frac{1}{e^x - 1}$$

anwenden, so würde man schon das erste Glied unter der Form $\frac{1}{0}$ erhalten, und in der That ist hier jener Satz gar nicht anwendbar, weil die vorstehende Funktion für $x=0$ eine Unterbrechung der Stetigkeit erleidet und unendlich wird. Dagegen kann man

$$F(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

setzen, da diese Funktion für $x=0$ den endlichen Werth 1 annimmt und ebenso wie ihre Differenzialquotienten stetig und endlich bleibt von $x=0$ bis $x=2\pi\sqrt{-1}$, wo eine zweite Unstetigkeit eintritt. Wollte man hier die höheren Differenzialquotienten wirklich entwickeln und dann in ihnen $x=0$ nehmen, so würden sie sich sämmtlich unter der vieldeutigen Form $\frac{1}{0} - \frac{1}{0} + \frac{1}{0}$ etc. präsentiren; diess lässt sich indessen durch einen sehr einfachen Kunstgriff vermeiden. Man hat nämlich

$$\frac{x}{e^x - 1} - \frac{x}{e^x + 1} = \frac{2x}{e^{2x} - 1},$$

folglich

$$\frac{d}{dx^n}\left(\frac{x}{e^x - 1}\right) - \frac{d}{dx^n}\left(\frac{x}{e^x + 1}\right) = \frac{d}{dx^n}\left(\frac{2x}{e^{2x} - 1}\right).$$

Setzt man in dem Gliede auf der rechten Seite $2x = y$, so ist auch für

$$\frac{x}{e^x + 1} = \Phi(x),$$

$$F^{(n)}(x) - \Phi^{(n)}(x) = \frac{d}{dy^n}\left(\frac{y}{e^y - 1}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^n$$
$$= F^{(n)}(y) \cdot 2^n$$

oder

$$F^{(n)}(x) - \Phi^{n}(x) = 2^n F^{(n)}(2x).$$

Für $x=0$ ergiebt sich hieraus

$$F^{(n)}(0) - \Phi^{(n)}(0) = 2^n F^{(n)}(0),$$

folglich, wenn man $F^{(n)}(0)$ als Unbekannte ansieht,

$$F^{(n)}(0) = -\frac{\Phi^{(n)}(0)}{2^n-1}. \tag{9}$$

Es käme also blos darauf an $\Phi^{(n)}(0)$ zu finden, was aber sehr leicht ist, wenn man die Gleichung (5) mit x multiplicirt. Man erhält nämlich zunächst

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}x - \frac{C_1 x^2}{1} + \frac{C_3 x^4}{1.2.3} - \frac{C_5 x^6}{1.2.3.4.5} + \dots$$

unn da andererseits nach dem Mac-Laurinschen Satze

$$\Phi(x) = \Phi'(0) + \frac{\Phi'(0)}{1}x + \frac{\Phi''(0)}{1.2}x^2 + \dots$$

sein muss, so erhält man durch Vergleichung beider Resultate leicht

$$\Phi'(0) = \frac{1}{2}, \quad \Phi^{(n)}(0) = (-1)^{\frac{n}{2}} n C_{n-1}$$

für gerade n,

und $= 0$

für ungerade n.

Mithin ist nach no. (9)

$$F'(0) = -\frac{1}{2}, \quad F^{(n)}(0) = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}+1} n C_{n-1}}{2^n-1}$$

für gerade n,

und $= 0$

für ungerade n.

Es ist demnach, wenn wir für $F(x)$, $F(0)$, $F'(0)$ etc. ihre Werthe substituiren:

$$\frac{x}{e^x-1} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{2C_1}{2^2-1}\cdot\frac{x^2}{1.2} - \frac{4C_3}{2^4-1}\cdot\frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{6C_5}{2^6-1}\cdot\frac{x^6}{1.2\dots6} - \dots \tag{10}$$

Setzen wir noch zur Abkürzung

$$\frac{(2n)C_{2n-1}}{2^{2n}-1} = B_{2n-1},$$

woraus umgekehrt

$$C_{2n-1}=\frac{2^{2n}-1}{2n}B_{2n-1}$$

folgt, so können wir die unter (5) und (10) gewonnenen Resultate in folgender Form darstellen:

$$\left.\begin{array}{c}\frac{1}{e^x+1}=\frac{1}{2}-\frac{(2^2-1)B_1}{1.2}x+\frac{(2^4-1)B_3}{1.2.3.4}x^3-\ldots\\ \text{mod. } x<\pi.\end{array}\right\}\quad(11)$$

$$\left.\begin{array}{c}\frac{1}{e^x-1}=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}+\frac{B_1}{1.2}x-\frac{B_3}{1.2.3.4}x^3+\ldots\\ \text{mod. } x<2\pi.\end{array}\right\}\quad(12)$$

und in diesen Formeln ist

$$B_{2n-1}=\frac{(-1)^{n-1}(2n)}{2^{2n}-1}\left\{\frac{1}{2}\overset{2n-1}{J_1}-\frac{1}{2^2}\overset{2n-1}{J_2}+\ldots-\frac{1}{2^{2n}}\overset{2n-1}{J_{2n}}\right\}\quad(13)$$

oder auch

$$B_{2n-1}=\frac{(-1)^{n-1}(2n)}{2^{2n}(2^{2n}-1)}\left\{\overset{2n}{L_1}-\overset{2n}{L_2}+\overset{2n}{L_3}-\ldots-\overset{2n}{L_{2n}}\right\}\quad(14)$$

wobei die Grössen J und L nach den Formeln (1) und (6) berechnet werden.

Durch Addition der Gleichungen (11) und (12), unter der Bemerkung, dass

$$\frac{1}{e^x-1}+\frac{1}{e^x+1}=\frac{2e^x}{e^{2x}-1}=\frac{2}{e^x-e^{-x}}$$

ist, ergiebt sich noch

$$\left.\begin{array}{c}\frac{2}{e^x-e^{-x}}=\frac{1}{x}-\frac{(2^2-2)B_1}{1.2}x+\frac{(2^4-2)B_3}{1.2.3.4}x^3-\ldots\\ \text{mod. } x<\pi.\end{array}\right\}\quad(15)$$

III. Ein etwas complizirteres Beispiel ist das folgende. Es sei

$$F(x)=\frac{2}{e^x+e^{-x}}=\frac{2e^x}{e^{2x}+1},$$

so hat man nach der allgemeinen Formel no. (7) in §. 20., wenn man

$$f(z)=\frac{2z^*}{z^2+1}$$

setzt,

$$F^{(n)}(x)=\frac{1}{1}\overset{n}{K}_1 e^x f'(e^x)+\frac{1}{1.2}\overset{n}{K}_2 e^{2x} f''(e^x)+\frac{1}{1.2.3}\overset{n}{K}_3 e^{3x} f'''(e^x)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{1.2\ldots n}\overset{n}{K}_n e^{nx} f^{(n)}(e^x).$$

Es ist aber nach Formel (12) in §. 14.

$$f^{(p)}(z)=(-1)^p\,1.2\ldots.p\frac{2\cos[(p+1)\operatorname{Arctan}\frac{1}{z}]}{(z^2+1)^{\frac{1}{2}(p+1)}},$$

mithin

$$f^{(p)}(e^x)=(-1)^p\,1.2\ldots p\frac{2\cos[(p+1)\operatorname{Arctan}e^{-x}]}{(e^{2x}+1)^{\frac{1}{2}(p+1)}}$$

und wenn dies für $p=1, 2, 3, \ldots n$ in die Formel für $F^{(n)}(x)$ substituirt wird, so ergiebt sich

$$\begin{aligned}F^{(n)}(x) = &-\overset{n}{K}_1 e^x\frac{2\cos(2\operatorname{Arctan}e^{-x})}{(e^{2x}+1)^{\frac{2}{2}}}\\ &+\overset{n}{K}_2 e^{2x}\frac{2\cos(3\operatorname{Arctan}e^{-x})}{(e^{2x}+1)^{\frac{3}{2}}}\\ &-\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+(-1)^n\overset{n}{K}_n e^{nx}\frac{2\cos[(n+1)\operatorname{Arctan}e^{-x}]}{(e^{2x}+1)^{\frac{n+1}{2}}}\end{aligned}$$

folglich für $x=0$ wegen $\operatorname{Arctan}1=\frac{\pi}{4}$,

$$F^{(n)}(0)=-\overset{n}{K}_1\frac{2\cos\frac{2\pi}{4}}{(\sqrt{2})^2}+\overset{n}{K}_2\frac{2\cos\frac{3\pi}{4}}{(\sqrt{2})^3}-\ldots+(-1)^n\overset{n}{K}_n\frac{2\cos\frac{(n+1)\pi}{4}}{(\sqrt{2})^{n+1}},$$

wobei wir zur Abkürzung

$$-\overset{n}{K}_1\cos\frac{2\pi}{4}+\overset{n}{K}_2\frac{\cos\frac{3\pi}{4}}{\sqrt{2}}-\overset{n}{K}_3\frac{\cos\frac{4\pi}{4}}{(\sqrt{2})^2}+\ldots$$
$$\ldots+(-1)^n\overset{n}{K}_n\frac{\cos\frac{(n+1)\pi}{4}}{(\sqrt{2})^{n-1}}=A_n \qquad (16)$$

setzen wollen. Es ist dann $F^{(n)}(0)=A_n$ und mithin

$$\frac{2}{e^x+e^{-x}}=1+\frac{A_1}{1}x+\frac{A_2}{1.2}x^2+\frac{A_3}{1.2.3}x^3+\ldots$$

Für negative x hätte man ebenso

$$\frac{2}{e^{-x}+e^{x}}=1-\frac{A_1}{1}x+\frac{A_2}{1.2}x^2-\frac{A_3}{1.2.3}x^3+\ldots$$

Hier sind nun die linken Seiten beider Gleichungen einander gleich und folglich müssen es auch die rechten Seiten sein. Aus dieser Bemerkung erhält man $A_1 = A_3 = A_5$ etc, $= 0$ und also bleibt übrig

$$\frac{2}{e^{x}+e^{-x}}=1+\frac{A_2}{1.2}x^2+\frac{A_4}{1.2.3.4}x^4+\ldots$$

Berechnet man die Werthe von A_2, A_4 etc. nach Formel (16), so findet man einen Zeichenwechsel in denselben und daher ist es passend, folgendermassen zu bezeichnen:

$$B_{2n}=(-1)^n\left\{\overset{2n}{K}_2\frac{\cos\frac{3\pi}{4}}{\sqrt{2}}-\overset{2n}{K}_3\frac{\cos\frac{4\pi}{4}}{(\sqrt{2})^2}+\overset{2n}{K}_4\frac{\cos\frac{5\pi}{4}}{(\sqrt{2})^3}-\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\overset{2n}{K}_{2n}\frac{\cos\frac{(2n+1)\pi}{4}}{(\sqrt{2})^{2n-1}}\right\} \qquad (17)$$

damit die Grössen B_{2n} positiv bleiben und

$$A_{2n}=(-1)^n B_{2n}$$

ist. Für die nach der obigen Formel bestimmten Werthe von B ist nun

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{2}{e^{x}+e^{-x}}=1-\dfrac{B_2}{1.2}x^2+\dfrac{B_4}{1.2.3.4}x^4-\ldots\\ \bmod x<\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right\} \qquad (18)$$

Die hinzugefügte Bedingung $\bmod x<\frac{\pi}{2}$ ergiebt sich aus der Bemerkung, dass die Funktion

$$\frac{2}{e^{x}+e^{-x}}=\frac{2e^{x}}{e^{2x}+1}$$

und deren Differenzialquotienten nicht eher unstetig oder unendlich werden, als bis $x=\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}$ geworden ist.

§ 44.

Die Reihen für die Tangente, Cotangente, Cosekante und Sekante.

Nachdem wir früher gezeigt haben, auf welche Weise sich $\cos x$ und $\sin x$ mittelst des Mac Laurin'schen Theoremes in Reihen verwan-

deln lassen, liegt es uns noch ob, die Reihen für $\tan x$, $\cot x$, $\operatorname{cosec} x$ und $\sec x$ zu entwickeln, womit dann die Aufgabe, eine direkte näherungsweise Berechnung der goniometrischen Funktionen anzugeben, vollständig gelöst wäre. Zur Erfüllung der gestellten Forderung bedarf es aber gar keines neuen Calcüls, indem die gesuchten Reihen sich aus den im vorigen Paragraphen entwickelten durch ein paar einfache Transformationen sehr leicht ableiten lassen, wie aus dem Folgenden erhellen wird.

I. Subtrahiren wir beide Theile der Gleichung (11) von $\frac{1}{2}$ mit der Bemerkung, dass

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{e^x+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^x-1}{e^x+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}}$$

ist, so ergiebt sich

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}}=\frac{(2^2-1)B_1}{1.2}x-\frac{(2^4-1)B_3}{1.2.3.4}x^3+\ldots$$

$$\operatorname{mod} x < \pi.$$

Nehmen wir hier $x = z\sqrt{-1}$, wo nun z der Modulus von x ist, und dividiren beiderseits mit $\sqrt{-1} = i$, so wird

$$\left.\begin{array}{c}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{i}\frac{e^{\frac{z}{2}i}-e^{-\frac{z}{2}i}}{e^{\frac{z}{2}i}+e^{-\frac{z}{2}i}}=\frac{(2^2-1)B_1}{1.2}z+\frac{(2^4-1)B_3}{1.2.3.4}z^3+\ldots\\ z<\pi.\end{array}\right\}\quad(1)$$

Die linke Seite ist hier nichts Anderes, als $\frac{1}{2}\tan\frac{z}{2}$; aus den Gleichungen

$$\cos\frac{z}{2}+i\sin\frac{z}{2}=e^{\frac{z}{2}i}$$

$$\cos\frac{z}{2}-i\sin\frac{z}{2}=e^{-\frac{z}{2}i}$$

folgt nämlich durch Subtraktion und Addition

$$\sin\frac{z}{2}=\frac{e^{\frac{z}{2}i}-e^{-\frac{z}{2}i}}{2i}\quad(2)$$

$$\cos\frac{z}{2}=\frac{e^{\frac{z}{2}i}+e^{-\frac{z}{2}i}}{2}\quad(3)$$

und durch Division mit der zweiten in die erste

$$\tan\frac{z}{2}=\frac{1}{i}\,\frac{e^{\frac{z}{2}i}-e^{-\frac{z}{2}i}}{e^{\frac{z}{2}i}-e^{-\frac{z}{2}i}},$$

und folglich haben wir noch no. (1)

$$\left.\begin{array}{c}\frac{1}{2}\tan\frac{z}{2}=\frac{(2^2-1)B_1}{1.2}z+\frac{(2^4-1)B_3}{1.2.3.4}z^3+\ldots.\\ z<\pi.\end{array}\right\}\quad(4)$$

Setzen wir endlich noch $z=2x$ und multipliziren beiderseits mit 2, so ergiebt sich für $2x<\pi$

$$\left.\begin{array}{l}\tan x=\frac{2^2(2^2-1)B_1}{1.2}x+\frac{2^4(2^4-1)B_3}{1.2.3.4}x^3\\ \qquad+\frac{2^6(2^6-1)B_5}{1.2.3.4.5.6}x^5+\ldots.\\ \qquad x<\frac{\pi}{2}.\end{array}\right\}\quad(5)$$

II. Durch beiderseitige Addition von $\frac{1}{2}$ zur Gleichung (12) des vorigen Paragraphen erhält man leicht

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}}=\frac{1}{x}+\frac{B_1}{1.2}x-\frac{B_3}{1.2.3.4}x^3+\ldots$$

$$\operatorname{mod} x<2\pi$$

und für $x=z\sqrt{-1}$ nach Multiplikation mit $\sqrt{-1}=i$

$$\frac{i}{2}\cdot\frac{e^{\frac{z}{2}i}+e^{-\frac{z}{2}i}}{e^{\frac{z}{2}i}-e^{-\frac{z}{2}i}}=\frac{1}{z}-\frac{B_1}{1.2}z-\frac{B_3}{1.2.3.4}z^3-\ldots$$

$$z<2\pi$$

d. i., wenn man dasjenige berücksichtigt, was sich durch Division von no. (2) in no. (3) ergiebt:

$$\left.\begin{array}{c}\frac{1}{2}\cot\frac{z}{2}=\frac{1}{z}-\frac{B_1}{1.2}z-\frac{B_3}{1.2.3.4}z^3-\ldots\\ z<2\pi\end{array}\right\}\quad(6)$$

Für $z=2x$ findet man hieraus nach Multiplikation mit 2,

$$\left.\begin{aligned}\cot x = \frac{1}{x} - \frac{2^2 B_1}{1.2}\, x - \frac{2^4 B_3}{1.2.3.4}\, x^3 \\ - \frac{2^6 B_5}{1.2.3.4.5.6}\, x^5 - \ldots \\ x < \pi.\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

III. Ersetzt man in der Gleichung (15) des vorigen Paragraphen x durch $x\sqrt{-1}$, multiplizirt nachher mit $\sqrt{-1} = i$ und bemerkt, dass

$$\frac{2i}{e^{xi} - e^{-xi}} = \frac{1}{\frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}} = \frac{1}{\sin x}$$

ist, so ergiebt sich auf der Stelle

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{cosec} x = \frac{1}{x} + \frac{(2^2-2)\, B_1}{1.2}\, x - \frac{(2^4-2)\, B_3}{1.2.3.4}\, x^3 \\ + \frac{(2^6-2)\, B_5}{1.2.3.4.5.6}\, x^5 \\ x < \pi.\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Das Nämliche würde man auch durch Addition der Gleichungen (4) und (6) erhalten, wenn man die Relation

$$\frac{1}{2}\tan\frac{z}{2} + \frac{1}{2}\cot\frac{z}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{\sin\frac{z}{2}}{\cos\frac{z}{2}} + \frac{\cos\frac{z}{2}}{\sin\frac{z}{2}}\right\} = \frac{1}{2\cos\frac{z}{2}\,\sin\frac{z}{2}} = \frac{1}{\sin z}$$

dabei berücksichtigt und nachher x für z schreibt.

IV. Substituiren wir endlich in der Formel (18) des vorigen Paragraphen $x\sqrt{-1}$ für x und berücksichtigen, dass

$$\frac{2}{e^{xi} + e^{-xi}} = \frac{1}{\frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}} = \frac{1}{\cos x}$$

ist, so gelangen wir zur letzten Formel dieser Art, nämlich

$$\left.\begin{aligned}\sec x = 1 + \frac{B_2}{1.2}\, x^2 + \frac{B_4}{1.2.3.4}\, x^4 + \frac{B_6}{1.2..6}\, x^6 + \ldots \\ x < \frac{\pi}{2}.\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Es verdient noch bemerkt zu werden, dass man auch die Logarithmen

der Cosinus und Sinus, oder was, abgesehen vom Vorzeichen, das Nämliche ist, die Logarithmen der Sekanten und Cosekanten mittelst der so eben entwickelten Formeln in Reihen verwandeln kann. Es geschieht diess auf folgende Weise.

V. Für

$$F(x) = l\sec x = -l\cos x$$

wird

$$\frac{dF(x)}{dx} = \tan x,$$

und wenn wir diese Gleichung $(n-1)$ mal differenziren:

$$\frac{d^n F(x)}{dx^n} = \frac{d^{n-1}\tan x}{dx^{n-1}}$$

oder für $\tan x = \Phi(x)$

$$F^{(n)}(x) = \Phi^{(n-1)}(x)$$

und folglich auch

$$F^{(n)}(0) = \Phi^{(n-1)}(0).$$

Aus der Gleichung (5) erhält man aber sehr leicht

$$\Phi^{(n-1)}(0) = \frac{2^n(2^n-1)B_{n-1}}{n}$$

wenn n gerade ist

$$= 0$$

für ungerade n.

Nach dem Vorigen folgt nun

$$\frac{F^{(n)}(0)}{1.2.3..n} = \frac{2^n(2^n-1)B_{n-1}}{1.2.3..n} \cdot \frac{1}{n}$$

für gerade n

$$= 0$$

für ungerade n.

Wendet man jetzt auf die Funktion $F(x) = l\sec x$ den Mac Laurin'schen Satz mit der Bemerkung an, dass $F(0) = 0$ ist, so ergiebt sich auf der Stelle

$$l\sec x = \frac{2^2(2^2-1)B_1}{1.2} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{2^4(2^4-1)B_3}{1.2.3.4} \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{2^6(2^6-1)B_5}{1.2.3.4.5.6} \cdot \frac{x^6}{6} + \ldots \quad (10)$$

und diese Gleichung gilt für alle $x < \frac{\pi}{2}$, weil die Funktion $F(x)$ so

wie ihre Differentialquotienten erst an der Stelle $x = \frac{\pi}{2}$ unstetig und unendlich werden.

VI. Nimmt man

$$F(x) = l(x \operatorname{cosec} x) = lx - l \sin x,$$

so wird

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{1}{x} - \cot x,$$

folglich für $\frac{1}{x} - \cot x = \Psi(x)$,

$$F^{(n)}(x) = \Psi^{(n-1)}(x)$$

und

$$F^{(n)}(0) = \Psi^{(n-1)}(0).$$

Stellt man aber die Gleichung (7) in folgender Form dar:

$$\frac{1}{x} - \cot x = \frac{2^2 B_1}{1.2} x + \frac{2^4 B_3}{1.2.3.4} x^3 + \dots$$

so findet man ohne Schwierigkeit

$$\Psi^{(n-1)}(0) = \frac{2^n B_{n-1}}{n}$$

für gerade n

$$= 0$$

für ungerade n, mithin nach dem Früheren

$$\frac{F^{(n)}(0)}{1.2.3..n} = \frac{2^n B_{n-1}}{1.2.3..n} \cdot \frac{1}{n}$$

für gerade n

$$= 0$$

für ungerade n.

Mit Hülfe des Mac Laurin'schen Theoremes ergiebt sich nun für $F(x) = l(x \operatorname{cosec} x)$ und unter der Rücksicht, dass

$$F(0) = l\left(\frac{x}{\sin x}\right) = l(1) = 0$$

ist,

$$l(x \operatorname{cosec} x) = \frac{2^2 B_1}{1.2} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{2^4 B_3}{1.2.3.4} \cdot \frac{x^4}{4} + \dots \tag{11}$$

und diese Gleichung gilt für alle $x < \pi$, weil $F(x)$ erst für $x = \pi$ unstetig und unendlich wird. Eine etwas bequemere Form der Gleichung ist noch die folgende

$$\left.\begin{array}{l} l\operatorname{cosec} x = lx - \frac{2^2 B_1}{1.2}x^2 - \frac{2^4 B_3}{1.2.3.4}\cdot\frac{x^4}{4} \\ \qquad\qquad - \frac{2^6 B_5}{1.2.3.4.5.6}\cdot\frac{x^6}{6} - \dots \\ \qquad x < \pi. \end{array}\right\} \quad (12)$$

Differenzirt man die Gleichungen (10) und (12), so kommt man natürlich wieder auf die früheren in (5) und (7) zurück.

§. 45.

Die Bernoullischen Zahlen und die Sekantenkoeffizienten.

Wir haben in den Betrachtungen der beiden vorigen Paragraphen folgende zwei Reihen von Grössen kennen gelernt:

$$B_1\ ,\ B_3\ ,\ B_5\ ,\ B_7, \dots$$

und

$$B_2\ ,\ B_4\ ,\ B_6\ ,\ B_8, \dots$$

welche in der gesammten höheren Analysis eine wichtige Rolle spielen, wo sie bei mehreren Untersuchungen vorkommen, und denen man desshalb besondere Namen gegeben hat; es heissen nämlich B_1, B_3, B_5 etc. die Bernoullischen Zahlen und B_2, B_4, B_6 etc. die Sekantenkoeffizienten. Wir wollen nun hier zeigen, auf welche verschiedene Weisen dieselben berechnet werden können, wenn man nicht von den bereits entwickelten Formeln (13), (14) und (17) in §. 43. Gebrauch machen will.

I. Multiplizirt man die Gleichung (6) des vorigen Paragraphen mit $\sin z = 2\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}$, so wird die linke Seite derselben

$$= \cos^2\frac{z}{2} = \frac{1+\cos z}{2}$$

und die rechte

$$= \sin z\left\{\frac{1}{z} - \frac{B_1}{1.2}z - \frac{B_3}{1.2.3.4}z^3 - \dots\right\}.$$

Setzt man nun für $\cos z$ und $\sin z$ die gleichgeltenden Reihen und führt die auf der rechten Seite angedeutete Multiplikation wirklich aus, so erhält man zwei nach geraden Potenzen von z fortschreitende Reihen, in denen man die Coeffizienten gleicher Potenzen von z mit einander vergleichen kann. Führen wir zur Abkürzung die Bezeichnung

$$1.2.3\ldots m = m'$$

ein, so giebt die Ausführung der Multiplikation folgende Gleichung:

$$1 - \frac{1}{2}\frac{z^2}{2'} + \frac{1}{2}\frac{z^4}{4'} - \frac{1}{2}\frac{z^6}{6'} + \ldots\ldots$$

$$= 1 - \left\{\frac{1}{3'} + \frac{B_1}{1'.2'}\right\} z^2$$

$$+ \left\{\frac{1}{5'} + \frac{B_1}{3'.2'} - \frac{B_3}{1'.4'}\right\} z^4$$

$$- \left\{\frac{1}{7'} + \frac{B_1}{5'.2'} - \frac{B_3}{3'.4'} + \frac{B_5}{1'.6'}\right\} z^6$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

und die Vergleichung der Coeffizienten von z^n, wo n eine gerade Zahl >0 ist:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n'} = \frac{1}{(n+1)'} + \frac{B_1}{(n-1)'.2'} - \frac{B_3}{(n-3)'.4'} + \frac{B_5}{(n-5)'.6'} - \ldots\ldots$$

Durch Multiplikation mit $(n+1)'$ ergiebt sich hieraus

$$\frac{n+1}{2} = 1 + \frac{(n+1)n}{1.2} B_1 - \frac{(n+1)\,n\,(n-1)\,(n-2)}{1.2.3.4} B_3$$
$$+ \frac{(n+1)\,n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5.6} B_5 - \ldots$$

d. i nach der bekannten Bezeichnung der Binomialkoeffizienten

$$\frac{n-1}{2} = (n+1)_2 B_1 - (n+1)_4 B_3 + (n+1)_6 B_5 - \ldots\ldots$$

und wenn man $n = m-1$ setzt, wo nun m ungerade ist:

$$\frac{m-2}{2} = m_2 B_1 - m_4 B_3 + m_6 B_5 - \ldots \qquad (1)$$

Aus dieser sehr einfachen Formel erhält man leicht die Bernoullischen Zahlen, wenn man der Reihe nach $m = 3,\ 5,\ 7$ etc. nimmt nach folgendem Schema:

$m=3$ giebt $\frac{1}{2} = 3.B_1$ folgl. $B_1 = \frac{1}{6}$

$m=5$ giebt $\frac{3}{2} = 10.B_1 - 5B_3 = 10.\frac{1}{6} - 5B_3$ folglich $B_3 = \frac{1}{30}$

u. s. f.

Hieraus ersieht man, dass die Gleichung (1) irgend eine Bernoullische

Zahl aus allen ihren Vorgängern berechnen lehrt, dass sie mithin eine sogenannte **Rekursionsformel** ist.

Mittelst eines ganz ähnlichen Verfahrens liesse sich noch eine ganze Reihe solcher Formeln entwickeln; so hätte man z. B. aus (7)

$$\cos x = \sin x\left(\frac{1}{x} - \frac{2^2 B_1}{1.2}x - \frac{2^4 B_3}{1.2\,3.4}x^3 - \ldots\right)$$

und aus no. (5)

$$\sin x = \cos x\left\{\frac{2^2(2^2-1)B_1}{1.2}x + \frac{2^4(2^4-1)B_3}{1.2.3.4}x^3 + \ldots\right\}$$

und könnte nun für $\cos x$, $\sin x$ die gleichgeltenden Reihen setzen, die angedeuteten Multiplikationen ausführen und dann eine Coeffizientenvergleichung vornehmen; man würde aber zu weniger einfachen Formeln gelangen, weil die verschiedenen Potenzen von 2 sich in diesen Calcül einmengen.

Behandelt man ebenso die Gleichung (9), indem man

$$1 = \cos x\left(1 + \frac{B_2}{2'}x^2 + \frac{B_4}{4'}x^4 + \frac{B_6}{6'}x^6 + \ldots\right)$$

und für $\cos x$ die gleichgeltende Reihe setzt, so ergiebt sich ohne Schwierigkeit

$$\begin{aligned}1 = 1 &- \left(\frac{1}{2'} - \frac{B^2}{2'}\right)x^2\\ &+ \left(\frac{1}{4'} - \frac{B_2}{2'.2'} + \frac{B_4}{4'}\right)x^4\\ &- \left(\frac{1}{6'} - \frac{B_2}{4'.2'} + \frac{B_4}{2'.4'} - \frac{B_6}{6'}\right)x^6\\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

und folglich ist der Coeffizient von x^m, wo m nur gerade sein darf, $=0$, d. i.

$$0 = \frac{1}{m'} - \frac{B_2}{(m-2)'.2'} + \frac{B_4}{(m-4)'.4'} - \frac{B_6}{(m-6)'.6'} + \ldots$$

Durch Multiplikation mit m' wird hieraus

$$1 = \frac{m(m-1)}{1.2}B_2 - \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}B_4 + \ldots$$

oder nach der Bezeichnung der Binomialkoeffizienten

$$1 = m_2 B_2 - m_4 B_4 + m_6 B_6 - \ldots \qquad (2)$$

was ein der Formel (1) sehr analoges Resultat ist. Für $m = 2, 4, 6$

etc. findet man leicht $B_2 = 1$, $B_4 = 5$, $B_1 = 61$ u. s. w. Die Sekantenkoeffizienten sind übrigens lauter ganze Zahlen; denn da m gerade ist, so bildet $m_m B_m = B_m$ das letzte Glied in der Reihe (2), und da m_2, m_4, m_6 etc. ganze Zahlen sind, so folgt jetzt, dass wenn B_2, B_4, B_6 ... B_{m-2} ganze Zahlen sind, es auch B_m sein muss; nun ist aber $B_2 = 1$ und folglich sind auch alle übrigen Sekantenkoeffizienten ganze Zahlen, die beiläufig bemerkt ganz ungemein rasch steigen.

Auch eine Relation zwischen den Bernoullischen Zahlen und den Sekantenkoeffizienten lässt sich mittelst der erwähnten Methode entdecken, wenn man nämlich die Gleichung (9) mit $\sin x$ multiplizirt und in der so entstehenden Formel

$$\tan x = \sin x \left(1 + \frac{B_2}{2'} x^2 + \frac{B_4}{4'} x^4 + \ldots\right)$$

für $\tan x$ und $\sin x$ die gleichgeltenden Reihen setzt. Vergleicht man nachher die Coeffizienten von x^m, wo m eine ungerade Zahl ist, so findet man ohne Schwierigkeit

$$\frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m+1} 2^{m+1}(2^{m+1} - 1) B_m = 1 - m_2 B_2 + m_4 B_4 - \ldots \qquad (3)$$

woraus man für $m = 1, 3, 5$, etc. die Bernoullischen Zahlen berechnen könnte, vorausgesetzt, dass die Sekantenkoeffizienten bereits bekannt sind.

II. Man kann dagegen auch solche Formeln aufstellen, mittelst deren man jede beliebige der mit B bezeichneten Zahlen berechnen kann, ohne die Vorgänger derselben zu kennen. Einige solcher, wie man zu sagen pflegt, independenter Formeln haben wir bereits entwickelt in no. (13), (14) und (17) §. 43.; wir stellen jetzt noch einige hinzu, welche vor jenen den Vorzug grösserer Eleganz haben.

Bezeichnet man $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$ mit $F(x)$, $\tan x$ mit $\Phi(x)$ und $\sec x$ mit $\Psi(x)$, so ist vermöge einer bekannten trigonometrischen Formel

$$F(x) = \Phi(x) + \Psi(x)$$

und folglich auch wenn man nach $n$maliger Differenziation $x = 0$ macht

$$F^{(n)}(0) = \Phi^{(n)}(0) + \Psi^{(n)}(0).$$

Für ein ungerades n hat man aber vermöge der Reihen für $\Phi(x) = \tan x$ und $\Psi(x) = \sec x$

$$\Phi^{(n)}(0)=\frac{2^{n+1}(2^{n+1}-1)}{n+1}B_n\ ,\quad \Psi^{(n)}(0)=0$$

und für ein gerades $n>0$

$$\Phi^{(n)}(0)=0\ ,\quad \Psi^{(n)}(0)=B_n,$$

wo im ersten Falle B_n eine Bernoullische Zahl und im zweiten einen Sekantenkoeffizienten bedeutet Nach dem Vorigen ist nun auch

$$\left.\begin{aligned} F^{(n)}(0)&=\frac{2^{n+1}(2^{n+1}-1)}{n+1}B_n \text{ für ungerade } n \\ &=B_n \text{ für gerade } n \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

und man kann demnach aus dem $n$ten Differenzialquotienten von $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$ eine Formel zur Berechnung der Bernoullischen Zahlen sowohl als der Sekantenkoeffizienten ableiten. Um nun jenen Differenzialquotienten zu entwickeln, bemerken wir zunächst, dass

$$F(x)=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)=\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}=\frac{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}$$

ist, oder wenn man $\cos\frac{x}{2}$ und $\sin\frac{x}{2}$ durch imaginäre Exponenzialgrössen ausdrückt:

$$F(x)=\frac{e^{\frac{x}{2}i}+e^{-\frac{x}{2}i}+\frac{1}{i}\left(e^{\frac{x}{2}i}-e^{-\frac{x}{2}i}\right)}{e^{\frac{x}{2}i}+e^{-\frac{x}{2}i}-\frac{1}{i}\left(e^{\frac{x}{2}i}-e^{-\frac{x}{2}i}\right)},$$

d. i. durch Multiplikation von Zähler und Nenner mit $ie^{\frac{x}{2}i}$;

$$F(x)=\frac{i(e^{xi}+1)+(e^{xi}-1)}{i(e^{xi}+1)-(e^{xi}-1)}=\frac{(i+1)e^{xi}+(i-1)}{(i-1)e^{xi}+(i+1)},$$

und wenn man Zähler und Nenner negativ nimmt:

$$F(x)=\frac{(1-i)-(1+i)e^{xi}}{(1-i)e^{xi}-(1+i)}.$$

Durch Multiplikation mit $\frac{1+i}{1+i}$ wird hieraus unter der Bemerkung, dass $1+i^2=0$ ist

$$F(x)=\frac{1-ie^{xi}}{e^{xi}-i},$$

wofür man endlich auch schreiben kann

$$F(x) = -i + \frac{2}{e^{xi} - i}.$$

Hieraus folgt nun unmittelbar

$$F^{(n)}(x) = 2\frac{d^n}{dx^n}\left\{\frac{1}{e^{xi} - i}\right\}. \tag{5}$$

Zur Entwicklung dieses Differenzialquotienten kann man zwei verschiedene Wege einschlagen, welche dann auch zu verschiedenen Formeln führen.

A. Nehmen wir in der früher abgeleiteten Formel

$$\frac{d^n}{dz^n}\left\{\frac{1}{e^z - a}\right\}$$

$$= \frac{1}{a}\left\{\overset{n}{J}_1\left(\frac{e^z}{e^z - a}\right) - \overset{n}{J}_2\left(\frac{e^z}{e^z - a}\right)^2 + \ldots + (-1)^n \overset{n}{J}_{n+1}\left(\frac{e^z}{e^z - a}\right)^{n+1}\right\}$$

$a = i$ und $z = xi$, so ergiebt sich auf der Stelle nach no. (2)

$$\frac{d^n}{dx^n}\left\{\frac{1}{e^{xi} - i}\right\} = \frac{1}{2}F^{(n)}(x)$$

$$= i^{n-1}\left\{\overset{n}{J}_1\left(\frac{e^{xi}}{e^{xi} - i}\right) - \overset{n}{J}_2\left(\frac{e^{xi}}{e^{xi} - i}\right)^2 + \ldots + (-1)^n \overset{n}{J}_{n+1}\left(\frac{e^{xi}}{e^{xi} - i}\right)^{n+1}\right\},$$

folglich für $x = 0$

$$F^{(n)}(0) = 2i^{n-1}\left\{\overset{n}{J}_1\frac{1}{1-i} - \overset{n}{J}_2\frac{1}{(1-i)^2} + \ldots + (-1)^n \overset{n}{J}_{n+1}\frac{1}{(1-i)^{n+1}}\right\}.$$

Um hier eine Sonderung der reellen und imaginären Grössen vornehmen zu können, bemerken wir, dass

$$1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

folglich

$$\frac{1}{1-i} = \frac{\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}}{\sqrt{2}}$$

u nd nach dem Moivre'schen Satze

$$\frac{1}{(1-i)^m} = \frac{\cos\frac{m\pi}{4} + i\sin\frac{m\pi}{4}}{(\sqrt{2})^m}$$

ist. Bringen wir diess in der Formel für $F^{(n)}(0)$ in Anwendung, so ergiebt sich

$$F^{(n)}(0)=2i^{n-1}\left\{\overset{n}{J}_1\frac{\cos\frac{\pi}{4}}{\sqrt{2}}-\overset{n}{J}_2\frac{\cos\frac{2\pi}{4}}{(\sqrt{2})^2}+\ldots+(-1)^n\overset{n}{J}_{n+1}\frac{\cos\frac{(n+1)\pi}{4}}{(\sqrt{2})^{n+1}}\right\}$$
$$+2i^n\left\{\overset{n}{J}_1\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\sqrt{2}}-\overset{n}{J}_2\frac{\sin\frac{2\pi}{4}}{(\sqrt{2})^2}+\ldots+(-1)^n\overset{n}{J}_{n+1}\frac{\sin\frac{(n+1)\pi}{4}}{(\sqrt{2})^{n+1}}\right\}.$$

Hier sind nun zwei Fälle zu unterscheiden, ob nämlich n ungerade oder gerade ist; im ersten wird i^{n-1} reell $=(-1)^{\frac{n-1}{2}}$ und i^n imaginär $=(-1)^{\frac{n-1}{2}}i$ und folglich haben wir durch Vergleichung mit no. (1)

$$\frac{2^{n+1}(2^{n+1}-1)}{n+1}B_n \tag{6}$$
$$=2(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left\{\overset{n}{J}_1\frac{\cos\frac{\pi}{4}}{\sqrt{2}}-\overset{n}{J}_2\frac{\cos\frac{2\pi}{4}}{(\sqrt{2})^2}+\ldots+(-1)^n\overset{n}{J}_{n+1}\frac{\cos\frac{(n+1)\pi}{4}}{(\sqrt{2})^{n+1}}\right\}$$

$$0=\overset{n}{J}_1\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\sqrt{2}}-\overset{n}{J}_2\frac{\sin\frac{2\pi}{4}}{(\sqrt{2})^2}+\ldots.+(-1)^n\overset{n}{J}_{n+1}\frac{\sin\frac{(n+1)\pi}{4}}{(\sqrt{2})^{n+1}}. \tag{7}$$

Ist dagegen n gerade, so wird i^n reell $=(-1)^{\frac{n}{2}}$ und i^{n-1} imaginär und folglich ist wieder durch Vergleichung mit (1):

$$B_n=2(-1)^{\frac{n}{2}}\left\{\overset{n}{J}_1\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\sqrt{2}}-\overset{n}{J}_2\frac{\sin\frac{2\pi}{4}}{(\sqrt{2})^2}+\ldots.+(-1)^n\overset{n}{J}_{n+1}\frac{\sin\frac{(n+1)\pi}{4}}{(\sqrt{2})^{n+1}}\right\} \tag{8}$$

$$0=\overset{n}{J}_1\frac{\cos\frac{\pi}{4}}{\sqrt{2}}-\overset{n}{J}_2\frac{\cos\frac{2\pi}{4}}{(\sqrt{2})^2}+\ldots.+(-1)^n\overset{n}{J}_{n+1}\frac{\cos\frac{(n+1)\pi}{4}}{(\sqrt{2})^{n+1}} \tag{9}$$

und von diesen vier Gleichungen, in welchen die Grössen J nach der bekannten Formel

$$\overset{n}{J}_p=p^n-(p-1)_1(p-1)^n+(p-1)_2(p-2)^n-\ldots. \tag{10}$$

bestimmt werden, dient die erste zur Berechnung der Bernoullischen Zahlen und die dritte zu der der Sekantenkoeffizienten. Beide Formeln lassen sich übrigens so zu sagen unter einen Hut bringen, so dass die Unterscheidung von ungeraden und geraden n wegfällt; setzt man nämlich:

$$\varepsilon=\frac{1-(-1)^n}{2},\ \eta=\frac{1+(-1)^n}{2}, \tag{11}$$

so enthält die Gleichung:

$$\frac{2^{\varepsilon(n+1)}(2^{\varepsilon n+1}-1)}{2(\varepsilon n+1)}B_n$$

$$=(-1)^{\frac{n-\varepsilon}{2}}\left\{\overset{n}{J_1}\frac{\varepsilon\cos\frac{\pi}{4}+\eta\sin\frac{\pi}{4}}{\sqrt{2}}-\overset{n}{J_2}\frac{\varepsilon\cos\frac{2\pi}{4}+\eta\sin\frac{2\pi}{4}}{(\sqrt{2})^2}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+(-1)^n\overset{n}{J}_{n+1}\frac{\varepsilon\cos\frac{(n+1)\pi}{4}+\eta\sin\frac{(n+1)\pi}{4}}{(\sqrt{2})^{n+1}}\right\} \quad (12)$$

die Formeln (3) und (5) gleichzeitig in sich. Für ungerade n wird nämlich $\varepsilon=1$ und $\eta=0$, für gerade n dagegen $\varepsilon=0$ und $\eta=1$, wodurch man auf die genannten Gleichungen zurückkommt, wenn man sich dieselben durch 2 dividirt denkt.

B. Anders gestalten sich die Ausdrücke, wenn man sich zur Bestimmung von $F^{(n)}(0)$ der Formel

$$\frac{d^n}{dz^n}\left\{\frac{1}{e^z-a}\right\}$$

$$=\frac{(-1)^n}{(e^z-a)^{n+1}}\{\overset{n}{L_1}a^{n-1}e^z+\overset{n}{L_2}a^{n-2}e^{2z}+\ldots+\overset{n}{L_n}e^{nz}\}$$

bedient, worin die Grössen L mittelst der Gleichung

$$\overset{n}{L_p}=p^n-(n+1)_1(p-1)^n+(n+1)_2(p-2)^n-\ldots \quad (13)$$

bestimmt werden. Man findet nämlich für $a=i$, $z=xi$ und nach no. (5)

$$\tfrac{1}{2}F^{(n)}(x)$$

$$=\frac{(-1)^n i^n}{(e^{xi}-i)^{n+1}}\{\overset{n}{L_1}i^{n-1}e^{xi}+\overset{n}{L_2}i^{n-2}e^{2xi}+\ldots+\overset{n}{L_n}e^{nxi}\}$$

und für $x=0$, wenn man mit i^n in die Parenthese multiplizirt,

$$\tfrac{1}{2}F^{(n)}(0) \quad (14)$$

$$=\frac{(-1)^n}{(1-i)^{n+1}}\{\overset{n}{L_1}i^{2n-1}+\overset{n}{L_2}i^{2n-2}+\overset{n}{L_3}i^{2n-3}+\ldots+\overset{n}{L_n}i^n\}.$$

Die in Paranthese stehende Reihe zerfällt wegen

$$i^{2n-1}=(-1)^{n-1}i\ ,\ i^{2n-2}=(-1)^{n-1}$$
$$i^{2n-3}=(-1)^{n-2}i\ ,\ i^{2n-4}=(-1)^{n-2}$$

u. s. f.

in eine imaginäre und eine reelle Partie, nämlich

$$(-1)^{n-1}\{\overset{n}{L}_1-\overset{n}{L}_3+\overset{n}{L}_5-\ldots.\}i$$
$$+(-1)^{n-1}\{\overset{n}{L}_2-\overset{n}{L}_4+\overset{n}{L}_6-\ldots.\},$$

wobei die eingeklammerten Reihen, die wir für den Augenblick mit P und Q bezeichnen wollen, nur so weit fortgesetzt werden, dass kein Index die Zahl n übersteigt. Setzen wir nun in no. (14)

$$(-1)^{n-1}(Pi+Q)$$

für den Inhalt der Parenthese, so wird

$$\frac{1}{2}F^{(n)}(0)=-\frac{Pi+Q}{(1-i)^{n+1}}=-\frac{Pi+Q}{\left[\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4})\right]^{n+1}}$$
$$=-\frac{(Pi+Q)\left(\cos\frac{(n+1)\pi}{4}+i\sin\frac{(n+1)\pi}{4}\right)}{(\sqrt{2})^{n+1}}$$

d. i. durch Ausführung der angedeuteten Multiplikation im Zähler

$$\frac{1}{2}F(0)=\frac{1}{(\sqrt{2})^{n+1}}\left\{P\sin\frac{(n+1)\pi}{4}+Q\cos\frac{(n+1)\pi}{4}\right\}$$
$$-\frac{1}{(\sqrt{2})^{n+1}}\left\{P\cos\frac{(n+1)\pi}{4}+Q\sin\frac{(n+1)\pi}{4}\right\}.$$

Da wir aber aus no. (4) wissen, dass $F^{(n)}(0)$ immer reell ist, so muss der Faktor von i für sich Null sein, so dass

$$\frac{1}{2}F^{(n)}(0)=\frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}}\left\{P\sin\frac{(n+1)\pi}{4}-Q\cos\frac{(n+1)\pi}{4}\right\}$$

übrig bleibt. Berücksichtigen wir endlich, dass die beiden für $F^{(n)}(0)$ in no. (4) angegebenen Werthe in der Formel

$$F^{(n)}(0)=\frac{2^{\varepsilon(n+1)}(2^{\varepsilon n+1}-1)}{2n+1}B_n$$

zusammengefasst werden können, so gelangen wir vermöge der Bedeutungen von P und Q zu folgendem Endresultate:

$$\frac{2^{(\varepsilon+\frac{1}{2})(n+1)}(2^{\varepsilon n+1}-1)}{2(\varepsilon n+1)}B_n \qquad (15)$$
$$=\{\overset{n}{L}_1-\overset{n}{L}_3+\overset{n}{L}_5-\ldots.\}\sin\frac{(n+1)\pi}{4}$$
$$-\{\overset{n}{L}_2-\overset{n}{L}_4+\overset{n}{L}_6-\ldots.\}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}.$$

Es möge endlich noch bemerkt werden, dass die bisherigen Formeln in eine weit elegantere und symmetrischere Gestalt gebracht werden können, sobald man von der herkömmlichen Bezeichnungsweise, der wir hier gehuldigt haben, abgeht und die folgende einführt:

$$\tan x = \frac{G_1 x}{1} + \frac{G_3 x^3}{1.2.3} + \frac{G_5 x^5}{1.2.3.4.5} + \ldots \qquad (16)$$

$$\sec x = 1 + \frac{G_2 x^2}{1.2} + \frac{G_4 x^4}{1.2.3.4} + \ldots \qquad (17)$$

wobei

G_1, G_3, G_5, ... die Tangentenkoeffizienten,
G_2, G_4, G_6, ... die Sekantenkoeffizienten

heissen mögen, so dass die Bernouillischen Zahlen weiter nicht gebraucht, aber vermittelst der Relation

$$\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{2n} B_{2n-1} = G_{2n-1} \quad \text{oder} \quad B_{2n-1} = \frac{2n}{2^{2n}(2^{2n}-1)} G_{2n-1}$$

aus den Tangentenkoeffizienten abgeleitet werden können, während immer $B_{2n} = G_{2n}$ ist. Multiplizirt man nun die Gleichung (16) mit $\cos x$, setzt für $\sin x$ und $\cos x$ die gleichgeltenden Reihen und vergleicht dann die Coeffizienten von x^m, wo m immer ungerade ist, so findet man für die Tangentenkoeffizienten die Rekursionsformel

$$1 = m_1 G_1 - m_3 G_3 + m_5 G_5 - \ldots, \; m \text{ ungerade}, \qquad (18)$$

welche der für die Sekantenkoeffizienten entwickelten

$$1 = m_2 G_2 - m_4 G_4 + m_6 G_6 - \ldots, \; m \text{ gerade}. \qquad (19)$$

vollkommen analog ist. Zugleich ergiebt sich aus no. (18), dass die Grössen G_1, G_3, G_5 etc. sämmtlich ganze Zahlen sind wie die Sekantenkoeffizienten. Ferner hat man

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = 1 + \frac{G_1 x}{1} + \frac{G_2 x^2}{1.2} + \frac{G_3 x^3}{1.2.3} + \ldots$$

folglich für $F(x) = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$, $F^{(n)}(0) = G_n$ und mithin nach dem für $F^{(n)}(0)$ gefundenen Werthe

$$\left.\begin{aligned} 2^{\frac{n-1}{2}} G_n = &(\overset{n}{L}_1 - \overset{n}{L}_3 + \overset{n}{L}_5 - \ldots) \sin\frac{(n+1)\pi}{4} \\ &- (\overset{n}{L}_2 - \overset{n}{L}_4 + \overset{n}{L}_6 - \ldots) \cos\frac{(n+1)\pi}{4} \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

wo eine Unterscheidung gerader oder ungerader n gar nicht mehr vorkommt*).

§. 46.

Die Reihen für die cyklometrischen Funktionen.

Zur vollständigen Lösung des Problemes, die sämmtlichen Funktionen der algebraischen Analysis in Reihen zu verwandeln, fehlt uns noch die Entwickelung der Reihen für Arcsin x, Arccos x, Arctan x u. s. w. Dieselbe lässt sich auf folgende Weise bewerkstelligen.

I. Für $F(x) = \text{Arcsin}\, x$ könnte man auf die früher abgeleiteten Ausdrücke von $F^{(n)}(x)$ zurückgehen, um daraus für $x=0$ das allgemeine Glied der Mac Laurin'schen Reihe nämlich

$$\frac{F^{(n)}(0)}{1.2\ldots n}$$

zu entwickeln; man gelangt aber weit kürzer durch die Bemerkung zum Ziele, dass

$$\frac{d^n \text{Arcsin}\, x}{dx^n} = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right),$$

folglich für $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \Phi(x)$,

$$F^{(n)}(x) = \Phi^{(n-1)}(x)$$

und mithin auch

$$F^{(n)}(0) = \Phi^{(n-1)}(0)$$

ist. Vermöge des Binomialtheoremes hat man aber unter der Bedingung $1 > x > -1$ und für $\mu = -\frac{1}{2}$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \ldots$$

und hieraus findet man sehr leicht

*) Es wäre für die Eleganz des Calcüls sehr zu wünschen, dass die Analytiker auf den im Obigen enthaltenen Vorschlag eingehen möchten, was um so leichter sein dürfte, als der Buchstabe G, der hier eine spezifische Bedeutung erhalten hat (etwa wie π), sonst nur äusserst selten gebraucht wird.

$$\Phi^{(n-1)}(0) = \frac{1.3.5\ldots(n-1)}{2.4.6\ldots n} 1.2\ldots(n-1)$$

für ungerade n,

und $= 0$

für gerade n, folglich vermöge der vorigen Relation zwischen $F^{(n)}(0)$ und $\Phi^{(n-1)}(0)$

$$\frac{F^{(n)}(0)}{1.2.3\ldots n} = \frac{1.3.5\ldots(n-1)}{2.4.6\ldots n} \cdot \frac{1}{n}.$$

Diese Formel ist nur für $n=1$ unbrauchbar; in diesem Falle hat man aber unmittelbar

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \frac{F'(0)}{1} = 1.$$

Berücksichtigt man nun noch die Gleichung $F(0) = 0$, so giebt die Anwendung des Mac Laurin'schen Satzes

$$\text{Arcsin}\, x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \ldots \qquad (1)$$

und diese Gleichung gilt so lange, als keine der Funktionen $F(x)$, $F'(x)$, $F''(x)$ etc. unstetig oder unendlich wird. Man hat nun

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

und die übrigen Differenzialquotienten sind Brüche, deren Zähler verschiedene Potenzen von x mit ganzen positiven Exponenten enthalten und deren Nenner Potenzen von $1-x^2$ sind. Hieraus folgt sogleich, dass erst für $x=1$ ein Unendlichwerden von $F'(x)$, $F''(x)$ etc. eintreten kann, und dass mithin die Gleichung (1) für jedes $x < 1$ richtig bleibt.

Bemerkt man, dass

$$\text{Arcsin}\, x = \text{Arctan}\, \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

ist, so hat man auch

$$\text{Arctan}\, \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \ldots$$
$$x < 1$$

oder für

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = z, \quad \text{also } x = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}},$$

wo nun durch jedes beliebige reelle z die Bedingung $x < 1$ erfüllt wird

$$\text{Arctan } z$$
$$= \frac{1}{1}\frac{z}{\sqrt{1+z^2}} + \frac{1}{2}\frac{1}{3}\left(\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\right)^3 + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5}\left(\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\right)^5 + \dots \quad (2)$$

Für die Entwickelung von Arccos x in eine Reihe bedarf es keines neuen Calcüls, da nämlich

$$\text{Arccos } x = \frac{\pi}{2} - \text{Arcsin } x$$

ist, so hat man auf der Stelle:

$$\left.\begin{array}{c}\text{Arccos} x = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{1} - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} - \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} - \dots \\ x < 1.\end{array}\right\} \quad (3)$$

II. Will man Arctan x in eine Reihe verwandeln, so kann man sich entweder der früher entwickelten Formel

$$\frac{d^n \text{Arctan} x}{dx^n} = (-1)^{n-1} 1.2\dots(n-1) \frac{\sin\left(n \text{ Arctan} \frac{1}{x}\right)}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}n}}$$

oder einer der in no. I benutzten ganz ähnlichen Methode bedienen, indem man bemerkt, dass für $F(x) = \text{Arctan} x$, $F'(x) = \Psi(x) = \frac{1}{1+x^2}$:

$$F^{(n)}(x) = \Psi^{(n-1)}(x)$$

und folglich auch

$$F^{(n)}(0) = \Psi^{(n-1)}(0)$$

ist. Man hat aber für $x < 1$

$$\Psi(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

und hieraus findet sich sehr leicht

$$\Psi^{(n-1)}(0) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} 1.2\dots(n-1)$$

für ungerade n,

$$= 0$$

für gerade n, und mittelst der vorher gezeigten Relation zwischen $F^{(n)}(0)$ und $\Psi^{(n-1)}(0)$,

$$\frac{F^{(n)}(0)}{1.2.3\ldots n} = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n}$$

für ungerade n,

$$= 0$$

für gerade n. Die Anwendung des Mac Laurin'schen Theoremes giebt jetzt wegen $F(0) = 0$,

$$\text{Arctan}\, x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots. \tag{4}$$

Die Gränzen für die Gültigkeit dieser Gleichung bestimmen sich aus der einfachen Bemerkung, dass die Funktionen $F'(x)$, $F''(x)$ etc. für $x = 1.\sqrt{-1}$ unendlich werden und dass folglich $x < 1$ sein muss.

Da nach einer bekannten Formel

$$\text{Arctan}\, x = \text{Arcsin}\, \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

ist, so hat man auch

$$\text{Arcsin}\, \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots$$

und für

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = z, \text{ also } x = \frac{z}{\sqrt{1-z^2}},$$

wo nun $z <$ sein muss, wenn $x < 1$ bleiben soll:

$$\left.\begin{array}{c} \text{Arcsin}\, z = \dfrac{z}{\sqrt{1-z^2}} - \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{z}{\sqrt{1-z^2}}\right)^3 + \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{z}{\sqrt{1-z^2}}\right) - \ldots \\ z < \dfrac{1}{\sqrt{2}}. \end{array}\right\} \tag{5}$$

Will man $\text{Arccot}\, x = \text{Arctan}\, \frac{1}{x}$ berechnen, so braucht man blos die Formel

$$\text{Arccot}\, x = \text{Arctan}\, \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\, x$$

anzuwenden, indem man für x die oben entwickelte Reihe setzt

Berücksichtigt man die Gleichung

$$\text{Arctan}\,\alpha + \text{Arctan}\,\beta = \text{Arctan}\,\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta},$$

welche immer gilt, sobald $\alpha < 1$ und $\beta < 1$ ist, so hat man auch noch

$$\left.\begin{aligned} \text{Arctan}\,\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta} &= \frac{\alpha}{1} - \frac{\alpha^3}{3} + \frac{\alpha^5}{5} - \dots \\ &+ \frac{\beta}{1} - \frac{\beta^3}{3} + \frac{\beta^5}{5} - \dots \\ &\alpha < 1\,,\ \beta < 1, \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

wovon wir später eine interessante Anwendung machen werden.

§. 47.

Die Convergenz und Divergenz der Reihen.

Wenn wir nach der langen Folge von Consequenzen, welche sich an das Theorem von Mac Laurin und den in §. 41. entwickelten Satz knüpfen, von dem reichen Detail des Calcüls absehen und uns noch einmal zu einem Ueberblicke über das grosse Ganze dieser Untersuchungen erheben, so finden wir den hervorstechendsten Charakterzug derselben darin, dass der Gedankengang stets mit der Forderung anfängt, eine ihrer Form nach **gegebene** Funktion in eine nach steigenden Potenzen der Variabelen geordnete Reihe zu verwandeln, so weit diess überhaupt möglich ist. So wie nun hier die Funktion als das Primäre auftritt, wovon noch eine andere in gewisser Hinsicht weitläufigere Form gesucht wird, so liesse sich auch die umgekehrte Aufgabe stellen, nämlich, wenn eine Reihe gegeben ist, diejenige Funktion zu suchen, welche unter Anwendung des Mac Laurin'schen Theoremes die vorherbestimmte Reihe reproduziren würde; mit anderen Worten: dem Probleme von der **Verwandlung gegebener Funktionen in Reihen**, steht das Problem der **Summirung gegebener Reihen** gegenüber. Um diess zunächst an einem Beispiele zu erläutern, betrachten wir die Aufgabe, die Summe $F(x)$ der Reihe

$$\frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

aufzufinden. Bei dieser sehr einfachen Form reicht es hin, den Differenzialquotienten von $F(x)$ zu nehmen, um sogleich auf eine andere

Reihe zu kommen, deren Summe schon bekannt ist; man erhält nämlich

$$F'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots$$
$$= \frac{1}{1+x^2} \text{ wenn } x < 1 \text{ ist,}$$

und folglich muss $F(x)$ eine solche Funktion von x sein, dass $F'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ werden kann. Hier zeigt nun ein Blick auf die bekannten Differenzialformeln, dass $F(x) = \text{Arctan}\, x + C$ sein müsse, wo C eine beliebige Constante bedeutet, so dass man also für $x < 1$

$$\frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots = \text{Arctan}\, x + C$$

hat, wo sich nun die Constante C leicht bestimmen lässt, wenn man $x=0$ setzt; man findet nämlich $C=0$, wodurch die obige Gleichung auf ein schon bekanntes Resultat zurückkommt. Man wird sehr leicht bemerken, dass Aufgaben dieser Art nicht mehr in die Differenzialrechnung gehören, wie das direkte Problem von der Verwandlung der gegebenen Funktionen in Reihen, sondern vielmehr der Integralrechnung anheim fallen müssen, weil es bei ihnen darauf ankommt, aus den Differenzialquotienten einer ihrer Natur nach unbekannten Funktion diese letztere zu bestimmen. Wenn nun aber auch hier an keine weitere Auseinandersetzung über dergleichen Aufgaben zu denken ist, so giebt uns doch die blose Kenntniss derselben schon zu einer Untersuchung Gelegenheit, welche jedenfalls der Lösung einer solchen Aufgabe vorausgehen muss und die auch für die Differenzialrechnung von einiger Wichtigkeit ist. Bevor man sich nämlich nach den Rechnungsoperationen umsieht, mittelst deren man die Funktion aufsucht, welche der gegebenen Reihe gleich sein soll, muss man erst wissen, ob eine solche Funktion überhaupt existirt, weil man sonst viel Mühe und Scharfsinn aufbieten könnte, um etwas zu suchen, was nirgends zu finden ist. Dass es in der That solche Fälle geben kann, in welchen es Thorheit sein würde, nur den Griffel anzusetzen, kann man leicht an einzelnen Beispielen sehen. Wäre z. E. die Summe der Reihe

$$(x + \frac{1}{x}) + (x^2 + \frac{1}{x^2}) + (x^3 + \frac{1}{x^3}) + \ldots \text{ in inf.}$$

aufzusuchen, so hätte man für $x < 1$, $\frac{1}{x} > 1$ folglich $x + \frac{1}{x} > 1$ und mithin wäre die fragliche Summe $> 1 + 1 + 1 + \ldots$ d. h. sie wäre unan-

gebbar, weil sie jede angebbare noch so grosse Zahl übersteigt: für $x=1$ wäre sie $=2+2+2+\ldots$, also ebenfalls unendlich und für $x>1$ wäre $\frac{1}{x}<1$ und $x+\frac{1}{x}$ wieder >1, folglich die Sache wie im ersten Falle. Da nun ein vierter Fall nicht möglich ist, so folgt, dass es keine endliche bestimmte Funktion $F(x)$ geben kann, der man die obige Reihe gleich setzen dürfte. — Während wir also früher untersuchten, welchen Bedingungen eine gegebene Funktion genügen muss, wenn sie sich nach dem Mac Laurin'schen Theoreme in eine Reihe soll verwandeln lassen, so müssen wir jetzt umgekehrt fragen, welche Bedingungen muss eine gegebene Reihe erfüllen, wenn sie einer bestimmten endlichen Funktion gleich sein soll. Man kann diese Frage auch noch auf einen anderen Ausdruck bringen, wenn man durch eine Definition den Unterschied zwischen solchen Reihen, die einer bestimmten endlichen Grösse gleich sind und denen, welche dieser Eigenschaft ermangeln, fest hält. Denken wir uns nämlich eine Reihe von Grössen u_0, u_1, u_2, ... u_{n-1}, die so beschaffen sind, dass der Werth einer jeden durch ihre Stelle bestimmt wird, oder dass überhaupt irgend eine u_m aus ihnen eine gegebene Funktion $\varphi(m)$ ihres Index bildet, und setzen wir

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}$$

so bildet offenbar S_n eine gewisse Funktion der Gliederanzahl n. Machen wir nun die vorliegende endliche Reihe dadurch zu einer unendlichen, dass wir die Termenzahl n unbegränzt wachsen lassen, nehmen also

$$\text{Lim } S_n = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots \text{ in inf.}$$

so sind hinsichtlich der Funktion S_n zwei verschiedene Fälle möglich; entweder nämlich nähert sich dieselbe für unausgesetzt zunehmende n einer bestimmten angebbaren Grösse als Gränze, oder nicht. Im ersten Falle heisst die unendliche Reihe eine convergente und Lim S_n, was zur Abkürzung mit S bezeichnet werden möge, ihre Summe, so dass also

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots \text{ inf.}$$

ist, im zweiten Falle nennt man die unendliche Reihe divergent, und da hier Lim S_n nicht angebbar ist, so kann auch keine solche Gleichung wie vorhin aufgestellt werden. Man darf demnach sagen: nur die convergenten Reihen haben Summen, die divergenten dagegen nicht, oder auch: nur eine convergente Reihe gilt einer bestimmten

Grösse **gleich**, während es keine Grösse giebt, der man eine divergente Reihe gleich setzen dürfte. Man kann diesen Ausspruch auch sogleich umkehren; weiss man nämlich im Voraus, dass die **Gleichung** $S = u_0 + u_1 + u_2 +$ etc., worin S eine unendliche Grösse bezeichnet, statt findet, so muss die Reihe rechts nothwendig convergiren, denn wäre diess nicht der Fall, so würde es keine Grösse geben, mit der man sie identifiziren könnte, was der Voraussetzung widerspricht.

Es giebt demnach zwei verschiedene Wege, um über die Convergenz von Reihen überhaupt zu entscheiden. Kennt man nämlich im Voraus die Bedingungen, unter welchen eine Grösse S in eine (ihr gleiche) Reihe von der Form $u_0 + u_1 + u_2 +$ etc. verwandelt werden kann, so weiss man a **priori** die Umstände, unter welchen die letztere convergirt; ist dagegen S nicht gegeben, sondern die Reihe, so muss man a **posteriori** die Bedingungen ihrer Convergenz aufsuchen. Die erste Aufgabe, nämlich die Bestimmung der Umstände, unter welchen die Verwandlung einer Funktion $S = F(x)$ möglich ist, haben wir für den Fall, dass die fragliche Reihe nach steigenden Potenzen der Variabelen x fortschreitet, in §. 41. gelöst und können jetzt das Resultat in folgende Worten zusammenfassen: „die im Theoreme von Mac Laurin vorkommende Reihe convergirt so lange, als der Modulus von x unter dem kleinsten von den Modulis liegt, für welche die Funktion $F(x)$ oder irgend einer ihrer Differenzialquotienten unstetig oder unendlich wird;“ dagegen liegt uns noch die Untersuchung ob, welche a posteriori die Convergenzbedingungen für eine gegebene Reihe aufsuchen soll.

Es ist nun sehr leicht, wenigstens eine der Bedingungen anzugeben, unter welchen allein eine Reihe wie

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

convergiren kann, wobei wir übrigens der Allgemeinheit wegen nicht voraussetzen, dass dieselbe successive Potenzen einer Variabelen enthalten müsse. Die fragliche Bedingung besteht nämlich darin, dass eine unbegränzte Abnahme der Glieder statt finden oder, für wachsende n, $\operatorname{Lim} u_n = 0$ sein muss. Denn wären alle Glieder grösser als eine gegebene Grösse ε, so hätte man wenigstens bei lauter positiven Gliedern

$$\begin{aligned} & u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots \\ > \; & \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + \dots \\ > \; & \varepsilon(1 + 1 + 1 + 1 + \dots) \end{aligned}$$

und wie klein nun auch ε sein möge, so kann man doch das Produkt $\varepsilon(1+1+\ldots.)$ grösser als jede noch so grosse angebbare Zahl machen, wenn man nur hinreichend viel Einheiten zusammennimmt; es würde also die Summe der zuerst genannten Reihe jede angebbare Zahl übersteigen, folglich unangebbar und die Reihe divergent sein.

So nothwendig nun auch die Bedingung Lim $u_n = 0$ ist, so wenig hinreichend zeigt sie sich in einzelnen Fällen, namentlich wenn alle Reihenglieder positiv sind. Z. B. für $u_0 = 0$, $u_1 = \frac{1}{\sqrt{1}}$ $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ etc., $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ hat man zwar Lim $u_n = 0$, gleichwohl aber divergirt die Reihe

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots$$

Denn wenn S_n die Summe der n ersten Glieder bezeichnet, so ist

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots. + \frac{1}{\sqrt{n}}$$
$$> \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots. + \frac{1}{\sqrt{n}},$$

d. i.

$$S_n > n\,\frac{1}{\sqrt{n}} \text{ oder } S_n > \sqrt{n},$$

woraus man ersieht, dass die fragliche Reihe divergirt, weil S_n über alle Gränze hinauswächst, sobald diess mit der Termenzahl n der Fall ist. Beispiele dieser Art, deren Zahl sich leicht vermehren liesse, weisen darauf hin, dass noch andere Bedingungen erfüllt sein müssen, wenn die Convergenz einer Reihe ausser Zweifel sein soll. Zur Aufsuchung derselben halten wir uns nun an folgendes unmittelbar klare Prinzip: „wenn die beiden Reihen

$$t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + \ldots.$$

und

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots.$$

nur positive Glieder enthalten und man schon weiss, dass die erste derselben convergirt, so convergirt die zweite ebenfalls und zwar stärker, sobald

$$u_0 < t_0\,,\; u_1 < t_1\,,\; u_2 < t_2\,, \text{ etc.}$$

ist; divergirt dagegen die erste, so ist diess auch mit der zweiten der Fall, wenn die Ungleichungen

$$u_0 > t_0 \,,\; u_1 > t_1 \,,\; u_2 > t_2 \,,\; \text{etc.}$$

statt finden.“ Man kann diess noch erweitern, wenn man sich erinnert, dass eine convergente unendliche Reihe und eine endliche Reihe zusammen wieder eine convergente unendliche Reihe bilden. Ist nun, wenn auch nicht von vorn herein $u_0 < t_0$, $u_1 < t_1$, etc., so doch wenigstens von einer bestimmten endlichen Stelle an

$$u_m < t_m \,,\; u_{m+1} < t_{m+1} \,,\; u_{m+2} < t_{m+2} \,,\; \ldots;$$

so ist die Summe der Reihe

$$u_m + u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots.$$

eine unendliche Grösse, weil es die von $t_m + t_{m+1} + \text{etc.}$ ist; hieraus folgt, dass auch die Summe der Reihe

$$\begin{aligned} &u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{m-1} \\ &+ u_m + u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots.. \end{aligned}$$

eine endliche Grösse sein, d. h. die Reihe $u_0 + u_1 + u_2 +$ etc. convergiren müsse. Ebenso leicht kann man sich überzeugen, dass die letztere Reihe divergirt, sobald von einer gewissen Stelle an $u_m > t_m$, $u_{m+1} > t_{m+1}$ etc. und die Reihe $t_0 + t_1 + t_2 +$ etc. eine divergente ist.

Das so eben aufgestellte Princip der Reihenvergleichung lässt sich übrigens noch in etwas anderer Form aussprechen, wodurch seine Anwendung wesentlich erleichtert wird. Sei nämlich:

$$\frac{t_{m+1}}{t_m} = \lambda_1 \,,\; \frac{t_{m+2}}{t_{m+1}} = \lambda_2 \,,\; \frac{t_{m+3}}{t_{m+2}} = \lambda_3 \,,\; \ldots \tag{1}$$

so findet man sehr leicht

$$t_{m+1} = \lambda_1 t_m \,,\; t_{m+2} = \lambda_1 \lambda_2 t_m \,,\; t_{m+3} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 t_m, \text{ etc.}$$

mithin

$$\left.\begin{aligned} &t_m + t_{m+1} + t_{m+2} + t_{m+3} + \ldots. \\ &= t_m (1 + \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + \ldots.) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Ebenso hat man für

$$\frac{u_{m+1}}{u_m} = \mu_1 \,,\; \frac{u_{m+2}}{u_{m+1}} = \mu_2 \,,\; \frac{u_{m+3}}{u_{m+2}} = \mu_3 \,,\; \ldots \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} &u_m + u_{m+1} + u_{m+2} + u_{m+3} + \ldots. \\ &= u_m (1 + \mu_1 + \mu_1 \mu_2 + \mu_1 \mu_2 \mu_3 + \ldots.) \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Finden nun die folgenden Ungleichungen statt:

$$\mu_1 < \lambda_1 \;,\; \mu_2 < \lambda_2 \;,\; \mu_3 < \lambda_3 , \;\ldots. \tag{5}$$

so ist auch $\mu_1 \mu_2 < \lambda_1 \lambda_2$. $\mu_1 \mu_2 \mu_3 < \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ etc. und ebenso

$$1 + \mu_1 + \mu_1 \mu_2 + \mu_1 \mu_2 \mu_3 + \ldots$$
$$< 1 + \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + \ldots$$

d. i. vermöge der Gleichungen (2) und (4)

$$\frac{1}{u_m}(u_m + u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots.)$$
$$< \frac{1}{t_m}(t_m + t_{m+1} + t_{m+2} + \ldots.)$$

oder

$$\left.\begin{array}{l} u_m + u_{m+1} + u_{m+2} + u_{m+3} + \ldots \\ < \dfrac{u_m}{t_m}(t_m + t_{m+1} + t_{m+2} + t_{m+3} + \ldots) \end{array}\right\} \tag{6}$$

Wenn nun die Reihe

$$t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + \ldots.$$

convergirt, so ist auch die Summe der Reihe

$$t_m + t_{m+1} + t_{m+2} + \ldots$$

als eines Stückes von ihr eine endliche Grösse; folglich findet auch nach no. (6) das Nämliche mit der Summe der Reihe

$$u_m + u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots$$

und ebenso mit der von

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$$

statt, d. h. die letztere convergirt. Setzt man für die mit λ und μ bezeichneten Grössen ihre Werthe aus (1) und (3), so gehen die Ungleichungen (5) über in

$$\frac{u_{m+1}}{u_m} < \frac{t_{m+1}}{t_m} \,,\; \frac{u_{m+2}}{u_{m+1}} < \frac{t_{m+2}}{t_{m+1}}, \text{ etc.}$$

und man kann daher den folgenden Satz aussprechen:

Wenn die Reihe

$$t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + \ldots$$

convergirt, so convergirt auch die folgende

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$$

sobald der Quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ von irgend einer bestimmten Stelle an kleiner wird und auch kleiner bleibt als der entsprechende Quotient $\frac{t_{n+1}}{t_n}$.

Ebenso leicht überzeugt man sich von der Richtigkeit des ganz analogen Theoremes:

Wenn die Reihe

$$t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + \dots$$

divergirt, so divergirt auch die folgende

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

sobald der Quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ von einer bestimmten Stelle an grösser wird und auch grösser bleibt als der entsprechende Quotient $\frac{t_{n+1}}{t_n}$.

Von diesem für die Lehre von der Convergenz der Reihen sehr wichtigen Satze wollen wir nun zuvörderst einige Anwendungen machen, die zu eben so viel Criterien führen, mittelst deren man a posteriori über die Convergenz oder Divergenz gegebener Reihen entscheiden kann.

§. 48.

Vergleichung zwischen beliebigen Reihen und der geometrischen Progression.

Nach der sehr bekannten Formel für die Summirung der geometrischen Progression hat man

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots . + x^{n-1}$$
$$= \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x}$$

und folglich, wenn man die Gliederanzahl n unbegränzt wachsen lässt

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots \text{ in inf.}$$
$$= \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x} \operatorname{Lim} x^n.$$

Hier sind nun zwei Fälle zu unterscheiden, ob nämlich $x < 1$ oder > 1 ist. Im ersten wird $\operatorname{Lim} x^n = 0$ und folglich

$$1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x}\,,\; x<1$$

wie wir schon auf anderem Wege gefunden haben; für $x>1$ dagegen nimmt x^n mit x über alle Gränze hinaus zu und wird keine bestimmte Grösse mehr. Ist endlich $x=1$, so geht die Reihe $1+x+x^2+$ etc. über in $1+1+1+$ etc. und hat demnach wieder keine bestimmte Summe. Aus diesem Allen zusammen folgt nun, dass die Reihe

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

convergirt oder divergirt, je nachdem $x<1$ oder $x\geqq 1$ ist.

Hier bietet sich nun sogleich Gelegenheit zur Anwendung des im vorigen Paragraphen entwickelten Principes der Reihenvergleichung, wenn man nämlich für t_0, t_1, t_2, etc. die Glieder der so eben betrachteten Reihe setzt. Man hat dann

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} = x$$

und folglich convergirt die beliebige Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots,$$

wenn von einer bestimmten Stelle an

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < x$$

oder, weil im Falle der Convergenz $x<1$ sein muss, wenn

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$$

ist; dagegen divergirt sie, sobald von einer gewissen Stelle an

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > x \text{ und } x \geqq 1,$$

also

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$$

wird. Diess lässt sich auch noch etwas bequemer aussprechen. Heisst nämlich k der Gränzwerth von $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ für unendlich wachsende n, so darf man

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = k \pm \delta$$

setzen, wo δ eine Grösse bezeichnet, die bis zur Gränze Null abnimmt, sobald n wächst, die man also so klein machen kann, als es nur verlangt wird. Ist nun $k < 1$, so muss sich immer ein Werth m von n finden lassen so gross, dass $\delta < 1 - k$, also $k + \delta < 1$ ist und es von nun an auch bleibt, weil δ abnimmt, sobald n wächst. Wenn also $\operatorname{Lim}\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ ist, so giebt es immer eine Stelle $n = m$, von welcher ab der Quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ kleiner ist und bleibt als die Einheit. Wenn dagegen $k > 1$, so muss sich wieder ein Werth m von n finden lassen, für welchen $\delta < k - 1$, also $k - \delta > 1$ ist und es nun auch bleibt; es giebt daher für $\operatorname{Lim}\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ eine Stelle $n = m$, von welcher ab der Quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ immer über der Einheit liegt. Vermöge dieser Bemerkung und in Betracht des Vorigen erhalten wir nun folgendes Criterium der Convergenz oder Divergenz:

Die Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

convergirt oder divergirt, je nachdem

$$\operatorname{Lim}\frac{u_{n+1}}{u_n} \lessgtr 1$$

ist, wobei das obere Zeichen dem Falle der Convergenz, das untere dem der Divergenz entspricht.

Mit welcher Leichtigkeit sich dieser Satz anwenden lässt, werden die folgenden Beispiele zeigen.

Wäre die Convergenz oder Divergenz der Reihe

$$\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots$$

zu entscheiden, so hätte man $u_0 = 0$, $u_1 = \frac{x}{1}$, $u_2 = \frac{x^2}{2}$ etc.

$$u_n = \frac{x^n}{n}, \quad u_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

folglich

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+1}x = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}x,$$

mithin

$$\operatorname{Lim}\frac{u_{n+1}}{u_n} = x,$$

also findet für $x<1$ Convergenz und für $x>1$ Divergenz statt.

Hätte man ebenso über die Reihe

$$1.x+2x^2+3x^3+4x^4+\dots$$

zu diskutiren, so ergiebt sich

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)x^{n+1}}{nx^n}=(1+\frac{1}{n})x,$$

folglich

$$\text{Lim}\,\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$$

und demnach convergirt oder divergirt sie mit der vorigen unter gleichen Bedingungen.

Ist die Reihe

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\dots$$

gegeben, so wird

$$u_n=\frac{x^n}{1.2\dots n},\; u_{n+1}=\frac{x^{n+1}}{1.2\dots n(n+1)},$$

mithin

$$\text{Lim}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\text{Lim}\,\frac{x}{n+1}=0$$

für jedes willkührliche x. Dass es in der That eine Stelle giebt, von welcher ab die fragliche Reihe rascher als eine Progression abnimmt, wenn auch die Anfangsglieder sehr gross gewesen sind, kann man noch auf folgende Weise sehen. Wenn $n>p+1$, wo p eine beliebige Grösse bedeutet, so ist auch $np>p^2+p$ und

$$np+n>p^2+p+n,$$
$$np+n-p^2-p>n,$$

d. i.

$$(p+1)(n-p)>n.$$

Vermöge dieses Satzes können wir für $p=0,1,2,\dots(n-1)$ die folgenden Beziehungen aufstellen:

$$\begin{aligned} 1.n &= n \\ 2(n-1) &> n \\ 3(n-2) &> n \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;&\cdot\;\cdot\;\cdot \\ (n-1)2 &> n \\ n1 &= n. \end{aligned}$$

Durch Multiplikation derselben folgt leicht

$$1^2 . 2^2 . 3^2 \ldots . n^2 > n^n$$

und

$$1 . 2 . 3 \ldots . n > (\sqrt{n})^n,$$

folglich

$$\frac{x^n}{1.2.3 \ldots . n} < \frac{x^n}{(\sqrt{n})^n} < \left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n.$$

Trifft man also in der Reihe

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots .$$

auf ein Glied u_n, in welchem $\sqrt{n} > x$ oder $n > x^2$ ist, und ein solches muss sich für jedes bestimmte x finden, so ist von hier ab

$$\frac{x^n}{1.2 \ldots n} + \frac{x^{n+1}}{1.2 \ldots (n+1)} + \frac{x^{n+2}}{1.2 \ldots (n+2)} + \ldots .$$

$$< \left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n + \left(\frac{x}{\sqrt{n+1}}\right)^{n+1} + \left(\frac{x}{\sqrt{n+2}}\right)^{n+2} + \ldots .,$$

d. i.

$$< \left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n + \left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^{n+1} + \left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^{n+2} + \ldots .$$

und es findet also von hier an eine stärkere Convergenz statt als in einer geometrischen Progression.

So wie die eben betrachtete Reihe immer convergirte, so divergirt stets die folgende:

$$1 + 1 . x + 1 . 2x^2 + 1 . 2 . 3x^3 + \ldots .$$

Man hat nämlich

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1 . 2 \ldots . n(n+1)\, x^{n+1}}{1 . 2 \ldots . n x^n} = (n+1)\, x,$$

folglich für jedes von Null verschiedene x

$$\operatorname{Lim} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1.$$

Wäre dagegen $x=0$, so würde gar keine Reihe, sondern nur das erste Glied 1 vorhanden sein; also divergirt die Reihe immer und zwar von einer gewissen Stelle an stärker als eine geometrische Progression. Denn man hat nach dem Vorigen

$$1 . 2 . 3 \ldots . n x^n > (x \sqrt{n})^n,$$

sowie also $x\sqrt{n} > 1$ geworden ist, und dieser Fall tritt über lang oder kurz doch ein, so divergirt die Reihe stärker als die folgende:

$$(x\sqrt{n})^n + (x\sqrt{n})^{n+1} + \ldots,$$

wie man durch eine der vorigen ganz analoge Betrachtung leicht findet.

Wenden wir endlich den gefundenen Satz auf die Reihe

$$1 + \frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1).\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2).\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3.\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3 + \ldots$$

an, worin α, β, γ lauter positive Grössen sein mögen, so ist

$$u_n = \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1).\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+n-1)}{1.2.3\ldots n.\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\ldots(\gamma+n-1)}x^n,$$

$$u_{n+1} = \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n).\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+n)}{1.2.3\ldots(n+1).\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\ldots(\gamma+n)}x^{n+1},$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(n+1)(\gamma+n)}x$$

und wenn man Zähler wie Nenner mit $n.n$ dividirt:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(\frac{\alpha}{n}+1)(\frac{\beta}{n}+1)}{(1+\frac{1}{n})(\frac{\gamma}{n}+1)}x,$$

woraus sich

$$\text{Lim}\,\frac{u_{n+1}}{u_n} = x$$

findet. Die fragliche Reihe convergirt oder divergirt also, je nachdem $x < 1$ oder $x > 1$ ist.

Man wird aus diesen Beispielen ersehen, dass die angegebene Regel ohne Schwierigkeiten zu einer sicheren Entscheidung über die Convergenz oder Divergenz einer Reihe führt, sobald der Gränzwerth des Quotienten zweier Nachbarglieder entweder unter der Einheit liegt oder sie übersteigt; die Frage wäre nur noch, was in dem Falle von der Reihe zu halten ist, wo jener Gränzwerth der Einheit gleich wird. Da hat denn die Erfahrung an einzelnen Beispielen gezeigt, dass das genannte Kennzeichen hier nichts mehr entscheidet, indem es sowohl convergente als divergente Reihen giebt, in denen gleichmässig

$\text{Lim}\,\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$ ist. In der That darf man auch in diesem Falle keine Entscheidung durch jene Regel verlangen, denn der Nerv ihres Beweises liegt darin, dass für $\text{Lim}\,\frac{u_{n+1}}{u_n}\lessgtr 1$, es eine Stelle $n=m$ geben muss, von welcher ab der Quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ kleiner respektive grösser ist und **bleibt** als die Einheit, was natürlich für $\text{Lim}\,\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$ nicht mehr behauptet werden darf. In den meisten Fällen nun, wo $\text{Lim}\,\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$ ist, wird man durch die im folgenden Paragraphen entwickelte Regel zu einer Entscheidung über die Convergenz oder Divergenz gelangen.

§. 49.

Anderweite Reihenvergleichung.

Da das Princip der Reihenvergleichung voraussetzt, dass man schon eine Reihe habe, für welche die Bedingungen der Convergenz und Divergenz bekannt sind, so wird es zunächst darauf ankommen, eine summirbare Reihe zu entdecken, wie diess z. B. im vorigen Paragraphen mit der geometrischen Progression der Fall war. Hierzu dient uns die folgende Betrachtung.

Wenn a_0, a_1, ... a_{n-1}, b_0, b_1, ... b_{n-1} ganz beliebige, aber von Null verschiedene Grössen bezeichnen, so gilt zuvörderst die folgende rein identische Gleichung:

$$\frac{a_0\,a_1\,a_2\ldots a_{n-1}}{b_0\,b_1\,b_2\ldots b_{n-1}}=1+\frac{a_0-b_0}{b_0}+\frac{a_1-b_1}{b_1}\cdot\frac{a_0}{b_0}+\frac{a_2-b_2}{b_2}\cdot\frac{a_0\,a_1}{b_0\,b_1}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{a_{n-1}-b_{n-1}}{b_{n-1}}\cdot\frac{a_0\,a_1\ldots a_{n-2}}{b_0\,b_1\ldots b_{n-2}},$$

von deren Richtigkeit man sich sehr leicht dadurch überzeugen kann, dass man

$$\frac{a_0-b_0}{b_0}=\frac{a_0}{b_0}-1$$
$$\frac{a_1-b_1}{b_1}=\frac{a_1}{b_1}-1$$
u. s. f.

setzt und alle jetzt noch angedeuteten Rechnungsoperationen ausführt,

wobei sich alle Glieder auf der rechten Seite mit Ausnahme eines einzigen gegenseitig heben und eine blose Identität zurücklassen. Nimmt man nun in der erwähnten Gleichung

$$a_0=\alpha\ ,\ a_1=\alpha+1\ ,\ a_2=\alpha+2\ ,\ \ldots\ a_{n-1}=\alpha+n-1;$$
$$b_0=\beta\ ,\ b_1=\beta+1\ ,\ b_2=\beta+2\ ,\ \ldots\ b_{n-1}=\beta+n-1;$$

wobei α und β ein paar beliebige aber positive Grössen bezeichnen mögen, so ergiebt sich ohne Weiteres

$$\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots.(\alpha+n-1)}{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots.(\beta+n-1)}$$
$$=1+\frac{\alpha-\beta}{\beta}+\frac{\alpha-\beta}{\beta+1}\cdot\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\alpha-\beta}{\beta+2}\cdot\frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta(\beta+1)}+\ldots.$$
$$\ldots.+\frac{\alpha-\beta}{\beta+n-1}\cdot\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-2)}{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-2)} \qquad (1)$$

Aus dieser Gleichung liesse sich jetzt die Summe einer unendlichen Reihe ableiten; das Produkt auf der linken Seite besteht nämlich aus n fraktionären Faktoren und die Reihe rechts aus n Gliedern; lässt man daher n unausgesetzt wachsen und bestimmt den Gränzwerth des Produktes links, so erhält man unmittelbar die Summe der unendlichen Reihe rechts. Da α nicht $=\beta$ sein kann, weil sonst die Gleichung (1) auf das triviale Resultat $1=1$ hinauskäme, so haben wir hinsichtlich jener Gränzenbestimmung nur zwei Fälle zu unterscheiden, ob nämlich $\alpha<\beta$ oder $\alpha>\beta$. Von diesen beiden lässt sich aber der zweite wieder auf den ersten reduziren; denn gesetzt, man hätte gefunden:

$$\text{Lim}\,\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots.(\alpha+n-1)}{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots.(\beta+n-1)}=K\ ,\ \alpha<\beta,$$

so wäre

$$\text{Lim}\,\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots.(\beta+n-1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots.(\alpha+n-1)}=\frac{1}{K}\ ,\ \alpha<\beta,$$

und wenn man jetzt $\beta=\alpha'$, $\alpha=\beta'$ setzte, so hätte man

$$\text{Lim}\,\frac{\alpha'(\alpha'+1)(\alpha'+2)\ldots(\alpha'+n-1)}{\beta'(\beta'+1)(\beta'+2)\ldots(\beta'+n-1)}=\frac{1}{K}\ ,\ \beta'<\alpha'$$

und hiermit zugleich den zweiten Fall bewältigt, in welchem $\alpha>\beta$ oder $\alpha'>\beta'$ ist.

Wenn nun der Gränzwerth des Produktes

$$\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots.(\alpha+n-1)}{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots.(\beta+n-1)}\ ,\ \text{für }\beta>\alpha$$

gesucht werden soll, so kann man zwei Fälle unterscheiden, ob nämlich α und β beide ganze Zahlen sind oder nicht, was zu folgenden Untersuchungen veranlasst.

A. Wenn für ganze positive α und β, $\beta > \alpha$ sein soll, so kann men

$$\beta = \alpha + k$$

setzen, wo k eine ganze positive Zahl bedeutet; da nun in dem Produkte unter no. (2) die Zahl n noch beliebig ist, so darf man dieselbe auch $> k+1$ machen, so dass $\alpha+n-1 > \alpha+k$ wird. Schreibt man jetzt das fragliche Produkt in folgender Form

$$\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots.(\alpha+k-1)(\alpha+k)(\alpha+k+1)\ldots.(\alpha+n-1)}{(\alpha+k)(\alpha+k+1)\ldots(\alpha+n-1)(\alpha+n)(\alpha+n+1)\ldots(\alpha+n+k-1)},$$

so lässt sich auf der Stelle eine bedeutende Hebung vornehmen, bei welcher übrig bleibt:

$$\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots.(\alpha+k-1)}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)\ldots.(\alpha+n+k-1)}. \qquad (3)$$

Da nun der Zähler gar kein n mehr enthält und blos aus k constanten Faktoren besteht, so folgt, dass für unausgesetzt wachsende n das vorliegende Produkt sich der Gränze Null nähert, indem diess schon mit den einzelnen Faktoren

$$\frac{\alpha}{\alpha+n}, \frac{\alpha+1}{\alpha+n+1}, \ldots \frac{\alpha+k-1}{\alpha+n+k-1}$$

der Fall ist; das Produkt in no. (3) war aber mit dem in no. (1) identisch, folglich ist auch

$$\text{Lim} \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots.(\alpha+n-1)}{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots.(\beta+n-1)} = 0$$

für ganze positive α und β und $\beta > \alpha$.

B. Sind α und β nicht zugleich ganze positive Zahlen, aber doch wenigstens rational, so kann man sie immer auf gleichen Nenner bringen und demnach

$$\alpha = \frac{a}{c}, \beta = \frac{b}{c}$$

setzen, worin a, b, c ganze positive Zahlen sind und wegen $\beta > \alpha$, $b > a$ sein muss; das Produkt in no. (2) nimmt dann die folgende Form an:

$$\frac{a(a+c)(a+2c)\ldots.(a+\overline{n-1}c)}{b(b+c)(b+2c)\ldots.(b+\overline{n-1}c)}$$

Nun finden aber offenbar nachstehende Beziehungen statt:

$$\frac{a}{b}=\frac{a}{b},$$

$$\frac{a}{b}<\frac{a+1}{b+1},$$

$$\frac{a}{b}<\frac{a+2}{b+2},$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$\frac{a}{b}<\frac{a+c-1}{a+c-1};$$

wobei blos der Satz angewendet wird, dass ein ächter Bruch wächst, wenn man seinen Zähler und Nenner um gleich Viel vermehrt. Aus der Multiplikation der obigen Relationen, deren Anzahl c ist, folgt nun leicht:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^c<\frac{a(a+1)(a+2)\ldots.(a+c-1)}{b(b+1)(b+2)\ldots.(b+c-1)} \qquad (4)$$

und wenn wir für a und b der Reihe nach $a+c$ und $b+c$, $a+2c$ und $b+2c$, u. s. f. bis $a+\overline{n-1}c$ und $b+\overline{n-1}c$ setzen, so ist ferner

$$\left(\frac{a+c}{b+c}\right)^c<\frac{(a+c)(a+c+1)\ldots.(a+2c-1)}{(b+c)(b+c+1)\ldots.(b+2c-1)},$$

$$\left(\frac{a+2c}{b+2c}\right)^c<\frac{(a+2c)(a+2c+1)\ldots.(a+3c-1)}{(b+2c)(b+2c+1)\ldots.(b+3c-1)}$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$\left(\frac{a+\overline{n-1}c}{b+\overline{n-1}c}\right)^c<\frac{(a+\overline{n-1}c)(a+\overline{n-1}c+1)\ldots(a+nc-1)}{(b+\overline{n-1}c)(b+\overline{n-1}c+1)\ldots(b+nc-1)}.$$

Multiplizirt man die Ungleichungen von (4) inclusive an, so erhellt, dass der Zähler des neuen Produktes rechts sämmtliche in der Reihe

$$a\,,\ a+1\,,\ a+2\,,\ \ldots.\ a+nc-1$$

enthaltenen Zahlen als Faktoren enthält und zwar in natürlicher ununterbrochener Folge; ebenso enthält der Nenner alle Zahlen von b bis $b+nc-1$, und es ist demnach

$$\left(\frac{a}{b}\right)^c\left(\frac{a+c}{b+c}\right)^c\left(\frac{a+2c}{b+2c}\right)^c\ldots\left(\frac{a+\overline{n-1}c}{b+\overline{n-1}c}\right)^c$$

$$<\frac{a(a+1)(a+2)\ldots.(a+nc-1)}{b(b+1)(b+2)\ldots.(b+nc-1)}$$

oder wenn die ganze Zahl $nc = m$ gesetzt wird:

$$\frac{a(a+c)(a+2c)\ldots(a+\overline{n-1}c)}{b(b+c)(b+2c)\ldots(b+\overline{n-1}c)}$$

$$< \left\{ \frac{a(a+1)(a+2)\ldots(a+m-1)}{b(b+1)(b+2)\ldots(b+m-1)} \right\}^{\frac{1}{c}}$$

Wenn nun n, also auch m, ins Unendliche wächst, so nimmt das grössere der beiden obigen Produkte bis zur Gränze Null ab, weil in ihm a, b und m ganze positive Zahlen sind und $b > a$ ist (nach A). Dasselbe muss um so mehr mit dem kleineren Produkte der Fall sein, weil es wegen der positiven a, b und c nicht negativ werden kann. Wir haben also

$$\text{Lim}\, \frac{a(a+c)(a+2c)\ldots(a+\overline{n-1}c)}{b(b+c)(b+2c)\ldots(b+\overline{n-1}c)} = 0\,,\ b > a$$

oder auch

$$\text{Lim}\, \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1)}{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+n-1)} = 0\,,\ \beta > \alpha \qquad (5)$$

für alle rationalen positiven α und β. Da man irrationale Grössen so genau, als es nur verlangt wird, durch rationale Brüche darstellen kann, so darf man die Gültigkeit der Gleichung (5) auch für irrationale positive α und β behaupten; also gilt dieselbe überhaupt für alle positiven α und β, sobald nur $\alpha < \beta$ ist.

Nach der Bemerkung, welche wir früher über den Fall $\alpha > \beta$ machten, findet sich nun sehr leicht, dass das Produkt (2) für $\beta < \alpha$ mit n gleichzeitig über alle Gränze hinaus zunimmt.

Gehen wir jetzt in der identischen Gleichung (1) zur Gränze für unendlich wachsende n über, so wird:

$$0 = 1 + \frac{\alpha-\beta}{\beta}\left\{1 + \frac{\alpha}{\beta+1} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\beta+1)(\beta+2)} + \ldots\right\},\ \beta > \alpha$$

und also die Reihe rechts convergent für $\beta > \alpha$; dagegen würde sie für $\beta < \alpha$ divergiren, weil dann die linke Seite der obigen Gleichung nicht angebbar ist. Eleganter sieht das gefundene Resultat in folgender Form aus:

$$\frac{\beta}{\beta-\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{\beta+1} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\beta+1)(\beta+2)} + \ldots,\ \beta > \alpha,$$

oder wenn man $\beta-1$ für β schreibt, wo nun $\beta-1 > \alpha$ oder $\beta > \alpha+1$ sein muss:

$$\left.\begin{array}{c}\frac{\beta-1}{\beta-\alpha-1}=1+\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta(\beta+1)}+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\beta(\beta+1)(\beta+2)}+\ldots\\ \beta>\alpha+1.\end{array}\right\}\quad(6)$$

Dagegen divergirt die vorliegende Reihe für $\beta=\alpha+1$, weil sich dann ihre Glieder auf lauter Einheiten reduziren, und ebenso für $\beta<\alpha+1$, wo sie die Einheit beständig übersteigen.

Hieraus lässt sich nun sogleich wieder eine Convergenzregel ableiten, wenn man die Reihe in (6) für die früher mit t_0, t_1, t_2, ... bezeichnete nimmt. Es ist dann

$$t_n=\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1)}{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+n-1)},$$

$$t_{n-1}=\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)}{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+n)},$$

$$\frac{t_{n+1}}{t_n}=\frac{\alpha+n}{\beta+n}$$

und folglich wird die Reihe

$$u_0+u_1+u_2+u_3+\ldots,$$

convergiren, wenn von einer gewissen Stelle an der Quotient

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<\frac{\alpha+n}{\beta+n}\qquad(7)$$

ist und bleibt, wobei aber noch $\beta>\alpha+1$ sein muss. Um diese zwei verschiedenen Bedingungen in eine einzige zusammenfassen zu können, schliessen wir weiter so: aus der vorigen Ungleichung folgt noch

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}>\frac{\beta+n}{\alpha+n}$$

und durch Subtraktion von 1 von beiden und Multiplikation mit n;

$$\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)n>\frac{n}{\alpha+n}(\beta-\alpha).$$

Je grösser n ist, desto grösser ist auch die rechte Seite dieser Ungleichung, weil der Bruch $\frac{n}{\alpha+n}$ mit n wächst; der grösste überhaupt mögliche Werth derselben ist der Gränzwerth für unendlich wachsende n, nämlich

$$\text{Lim}\left[\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)n\right]>\beta-\alpha,$$

und wenn diese Ungleichung erfüllt ist, so sind, wie man leicht sieht, auch die vorhergehenden erfüllt. Bemerkt man nun noch, dass wegen der Convergenz $\beta > \alpha + 1$ also $\beta - \alpha > 1$ ist, so erhält man den Satz:

Die Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots..$$

welche nur positive Glieder enthält, convergirt, sobald die Bedingung

$$\text{Lim}\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)\right] > 1 \qquad (8)$$

erfüllt ist, dagegen divergirt sie, wenn der genannte Gränzwerth < 1 ist,

von dessen zweiter Hälfte man sich durch eine der vorigen völlig analoge Betrachtung überzeugen wird.

Um die Anwendung dieses Criteriums zu zeigen, wählen wir zunächst die am Ende des vorigen Paragraphen betrachtete Reihe für den Fall $x = 1$, in welchem das frühere Kennzeichen nichts entscheiden wollte; es ist dann

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{(n+1)(\gamma+n)}{(\alpha+n)(\beta+n)} = \frac{n\gamma + \gamma + n^2 + n}{\alpha\beta + \alpha n + \beta n + n^2},$$

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 = \frac{(\gamma + 1 - \alpha - \beta)\, n + \gamma - \alpha\beta}{(\alpha+n)(\beta+n)},$$

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \frac{n}{\alpha+n} \cdot \frac{(\gamma + 1 - \alpha - \beta)\, n + \gamma - \alpha\beta}{\beta + n}$$

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \frac{1}{\frac{\alpha}{n} + 1} \cdot \frac{\gamma + 1 - \alpha - \beta + \frac{\gamma - \alpha\beta}{n}}{\frac{\beta}{n} + 1}$$

folglich

$$\text{Lim}\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)\right] = \gamma + 1 - \alpha - \beta,$$

und wenn diess mehr als 1 betragen soll, so muss $\gamma - \alpha - \beta$ positiv sein. Demnach convergirt die Reihe

$$1 + \frac{\alpha . \beta}{1 . \gamma} + \frac{\alpha(\alpha+1) . \beta(\beta+1)}{1 . 2 . \gamma(\gamma+1)} + \dots. \qquad (9)$$

für $\gamma > \alpha + \beta$ und divergirt für $\gamma < \alpha + \beta$.

Wäre die Reihe

$$\frac{1}{1^\mu}+\frac{1}{2^\mu}+\frac{1}{3^\mu}+\dots \tag{10}$$

gegeben, so ergiebt sich $u_0=0$, $u_1=\frac{1}{1^\mu}$, $u_2=\frac{1}{2^\mu}$ etc.,

$$u_n=\frac{1}{n^\mu}\,,\; u_{n+1}=\frac{1}{(n+1)^\mu},$$

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=n\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^\mu-1\right\}.$$

Betrachtet man aber einen Ausdruck von der Form

$$\left(1+\frac{z}{m}\right)^m,$$

worin z eine beliebige positive Grösse, m eine positive ganze Zahl ist, so übersieht man leicht mit Hülfe des Binomialtheoremes, dass er mit m zugleich wächst; das Nämliche gilt von dem Ausdrucke

$$\left(1+\frac{px}{q}\right)^q$$

wenn p, q und x positiv sind für zunehmende q. Ist nun $q<p$, so kommt für $q=p$ mehr heraus, als für $q<p$, mithin

$$(1+x)^p > \left(1+\frac{px}{q}\right)^q,\, p>q$$

und

$$(1+x)^{\frac{p}{q}} > 1+\frac{p}{q}x$$

oder wenn $\frac{p}{q}=\mu$ gesetzt wird, wo nun $\mu>1$ ist,

$$(1+x)^\mu > 1+\mu x\;,\; \mu>1\;,\; x \text{ positiv};$$

folglich ist für $x=\frac{1}{n}$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^\mu > 1+\frac{\mu}{n}$$

und hieraus erhält man

$$n\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^\mu-1\right\} > \mu, \text{ d. i. } >1,$$

und folglich

$$\text{Lim}\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\right] > 1, \text{ für } \mu>1.$$

Demnach convergirt die Reihe (10) für $\mu > 1$ und ebenso leicht würde man sich überzeugen, dass sie für $\mu < 1$ divergirt. Diess letztere ist auch noch der Fall für $\mu = 1$; denn schreibt man die Reihe in folgender Gestalt:

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)$$
$$+ \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{16}\right)$$
$$+ \left(\frac{1}{17} + \frac{1}{18} + \ldots + \frac{1}{32}\right)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots$$

so ist der Inhalt der ersten Parenthese $> \frac{2}{4}$, d. i. $> \frac{1}{2}$, der der zweiten $> \frac{4}{8}$ oder $> \frac{1}{2}$, der Inhalt der dritten $> \frac{8}{16}$, d. i. $> \frac{1}{2}$, der der vierten $> \frac{16}{32}$ oder $> \frac{1}{2}$ u. s. f., folglich

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots$$
$$> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots,$$

woraus sogleich die Divergenz der fraglichen Reihe hervorgeht. Die Reihe (10) convergirt und divergirt also, je nachdem $\mu > 1$ oder $\mu \leqq 1$ ist.

§. 50.

Reihen mit positiven und negativen Gliedern.

Die Betrachtungen der vorigen beiden Paragraphen setzten voraus, dass sämmtliche Glieder der Reihe positiv seien; man kann sie aber auch mittelst eines sehr einfachen Kunstgriffes auf Reihen mit solchen Gliedern ausdehnen, die bald positiv bald negativ sind. Wäre nämlich

$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \ldots \qquad (1)$$

eine Reihe der Art, in welcher u_0, u_1, u_2, etc. an sich sämmtlich positiv sind, so ist klar, dass dieselbe convergiren muss, wenn diess mit der folgenden

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots.$$

der Fall ist, welche aus der in (1) stehenden dadurch hervorgeht, dass man die in jener vorkommenden Minuszeichen in Pluszeichen verwandelt. Denn wenn die Reihe $u_0 + u_1 + u_2$ etc. eine endliche Summe hat, so sind auch die Summen der Reihen

$$u_0 + u_2 + u_4 + u_6 + \ldots.$$
$$\text{und } u_1 + u_3 + u_5 + u_7 + \ldots.$$

endliche Grössen und folglich ist es auch ihre Differenz, die aber nichts Anderes ist, als die Summe der Reihe (1). Man kann daher von den früher entwickelten Kennzeichen, mittelst deren man die Convergenz oder Divergenz der Reihen mit nur positiven Gliedern entscheidet, auch für Reihen mit Gliedern von verschiedenen Vorzeichen Gebrauch machen, sobald man von den Vorzeichen der Glieder u_n und u_{n+1} abstrahirt, oder, was das Nämliche ist, sobald man die dort vorkommenden Quotienten

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \text{ und } \frac{u_n}{u_{n+1}}$$

immer als positiv ansieht.

Es giebt aber noch einen zweiten Fall, in welchem es leicht ist, die Convergenz oder Divergenz einer Reihe mit positiven und negativen Gliedern zu entscheiden. Findet nämlich in der gegebenen Reihe ein bloser Zeichenwechsel statt, so dass sie also von der Form

$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \ldots.$$

ist, und weiss man schon im Voraus, dass den absoluten Werthen nach

$$u_0 > u_1 > u_2 > u_3, \ldots.$$

und dass bei dieser beständigen Abnahme die Glieder kleiner als jede angebbare Zahl werden, so muss die Reihe nothwendig convergiren. Denn stellt man sie in den beiden folgenden Formen dar:

$$u_0 - u_1 + (u_2 - u_3) + (u_4 - u_5) + \ldots. \qquad (2)$$
$$u_0 - \{(u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \ldots.\} \qquad (3)$$

so sind in no. (2) die Differenzen $u_2 - u_3$, $u_4 - u_5$ etc. sämmtlich positiv und folglich ist die Summe der Reihe

$$> u_0 - u_1.$$

Ebenso sind in no. (3) die Differenzen $u_1 - u_2$, $u_3 - u_4$ etc. positive

Grössen und folglich ist der ganze Inhalt der Parenthese ebenfalls positiv; demnach muss die Summe der Reihe

$$< u_0$$

sein. Die Summe der fraglichen Reihe ist also zwischen zwei positiven endlichen Grössen $u_0 - u_1$ und u_0 enthalten, folglich selbst eine endliche positive Grösse und mithin convergirt die gegebene Reihe.

Dieses Criterium ist oft sehr leicht anzuwenden, weil man in vielen Fällen den Reihengliedern ihre Abnahme unter jeden beliebigen Grad der Kleinheit unmittelbar ansehen kann. So erkennt man z. B. die Reihe

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

auf den ersten Blick als eine convergente, weil ihre Summe mehr als $u_0 - u_1 = 1 - \frac{1}{2}$ und weniger als $u_0 = 1$ beträgt.

§ 51.

Die wichtigsten numerischen Reihen.

Wir haben früher gesehen, dass die Gleichung

$$F(x) = F(0) + \frac{x}{1} F'(0) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} F''(0)$$

so lange besteht, als der Modulus von x unter dem kleinsten von denjenigen Modulis liegt, für welche irgend eine der Funktionen $F(x)$, $F'(x)$, $F''(x)$ etc unendlich oder unstetig wird, und dass die Gültigkeit jener Gleichung aufhört, sobald der Modulus von x den gedachten Modulus übersteigt. Hierbei drängt sich nun noch die Frage auf, ob man nicht unter Umständen den Modulus von x noch jenem Modulus gleich nehmen dürfe, vorausgesetzt, dass das zugehörige Argument von x in diesem Falle einen gewissen erst noch zu bestimmenden Werth hat. Der Sinn dieser Frage wird sogleich deutlicher werden, wenn wir ein bestimmtes Beispiel betrachten. Nehmen wir etwa

$$F(x) = \frac{1}{e^x + 1}, \quad x = \varrho(\cos\tau + \sqrt{-1}\sin\tau),$$

so wird $F(x)$ unstetig und unendlich für $\varrho = \pi$, $\tau = \frac{\pi}{2}$, weil man dann

$$\frac{1}{e^{\pi\sqrt{-1}}+1}=\frac{1}{-1+1}$$

erhält; die Gleichung

$$\frac{1}{e^x+1}=A_0+A_1x+A_3x^3+\ldots.,$$

worin A_0, A_1, A_3 etc. zur Abkürzung dienen, gilt daher für jedes beliebige τ nur dann, wenn der Modulus ϱ von x weniger als π beträgt. Geben wir aber dem Argumente τ den speziellen Werth 0 und nehmen doch $\varrho=\pi$, so wird

$$F(x)=\frac{1}{e^\pi+1},$$

also noch nicht unstetig oder unendlich und es würde sich also fragen, ob die obige Gleichung nicht vielleicht noch für dieses System von ϱ und τ Bestand hat, wenn man auch ϱ nicht $>\pi$ nehmen darf. — Ebenso gilt die Gleichung

$$\operatorname{Arctan} x=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots.$$

nicht für $x>1$, weil

$$\frac{d\operatorname{Arctan} x}{dx}=\frac{1}{1+x^2}$$

für $x=\sqrt{-1}$ unendlich und unstetig wird, folglich der Modulus von $x<1$ bleiben muss: setzt man aber $x=1$, oder, was das Nämliche ist, $\varrho=1$, $\tau=0$, so bleiben $\operatorname{Arctan} x$ und $\frac{1}{1+x^2}$ noch endlich und stetig und es fragt sich daher wieder, ob die für $\operatorname{Arctan} x$ gefundene Reihe nicht noch für $x=1$ gilt.

Diese Frage lässt sich nun durch die folgende sehr einfache Betrachtung leicht beantworten. Es seien $F(x)$ und $\Phi(x)$ zwei stetige und endliche Funktionen, welche einander für $x<a$ identisch sind; dann hat man für jedes δ, wie klein dasselbe auch sein möge, $F(a-\delta)=\Phi(a-\delta)$. Bleiben nun beide Funktionen $F(x)$ und $\Phi(x)$ auch noch für $x=a$ stetig und endlich, so muss offenbar auch $F(a)=\Phi(a)$ sein, denn da die Gleichung $F(a-\delta)=\Phi(a-\delta)$ nicht zu gelten aufhört, wie klein auch δ sein möge, so könnte nur dann $F(a)$ nicht $=\Phi(a)$ sein, wenn eine dieser Funktionen für $x=a$ eine Unterbre-

chung der Stetigkeit erlitte oder für sich allein unendlich würde, was aber der Voraussetzung widerspricht. Man kann diesen Schluss, auf den hier Alles ankommt, auch geometrisch veranschaulichen. Denken wir uns nämlich $y = F(x)$ und $y = \Phi(x)$ als Gleichungen zweier Curven, so werden sich wegen $F(x) = \Phi(x)$ für $x < a$ diese letzteren decken bis dicht vor derjenigen Ordinate, welche $x = a$ entspricht. Sei in fig. 17. $OA = a$ und sowohl $F(a)$ als $\Phi(a)$ eine endliche Grösse, so giebt es nur zwei Fälle, in denen $F(a)$ nicht $= \Phi(a)$ zu sein braucht. Entweder nämlich decken sich zwar die Curven auf dem ganzen Laufe von M bis P und es wird hier eine der Funktionen diskontinuirlich, so dass etwa $F(a) = AP$, $\Phi(a) = AQ$ wäre; dann könnte man allerdings sagen: alle Punkte auf der Strecke MP gehören zwei Curven an, nur für $x = a$ ist diess nicht mehr der Fall, hier springen die Curven, die sich früher deckten, auseinander. Wird nun dieser Fall durch die Annahme ausgeschlossen, dass weder $F(x)$ noch $\Phi(x)$ für $x = a$ eine Unterbrechung der Stetigkeit erleide, so bleibt blos noch eine zweite Möglichkeit, nämlich die, dass sich die Curven irgend wo vorher etwa bei T schon getrennt hätten. Diess würde aber der Voraussetzung widersprechen, dass sich die Curven $y = F(x)$ und $y = \Phi(x)$ für jedes $x < a$ decken. Denn wenn OS die Abscisse ist, welche dem Trennungspunkte beider Curven entspricht, so nehme man zwischen S und A den Punkt R an und setze $OR = x$, so ist $x < a$ und folglich müssen sich die Curven der Voraussetzung nach decken; diess würde aber in der Zeichnung nicht der Fall sein, weil in ihr der Abscisse OR die beiden verschiedenen Ordinaten RU und RV entsprechen.

Der oben bewiesene Satz lässt sich nun mit der grössten Leichtigkeit für unsere Untersuchung benutzen, wenn für $F(x)$ die gegebene Funktion und für $\Phi(x)$ die Summe der Reihe

$$F(0) + \frac{x}{1} F'(0) + \frac{x^2}{1.2} F''(0) + \dots$$

genommen wird. Ist nun schon $F(x)$ stetig und endlich für $x = a$, so muss diess noch mit $\Phi(a)$ der Fall sein, wenn $F(a) = \Phi(a)$ werden soll. Endlichkeit von $\Phi(a)$ ist aber nichts Anderes als Convergenz der vorstehenden Reihe; ist diese vorhanden, so bleibt $\Phi(x)$ auch stetig für $x = a$; denn im Falle des Gegentheiles müsste $\Phi(a)$ zwei Werthe haben: Lim $\Phi(a - \delta)$ und Lim $\Phi(a + \delta)$, was aber nicht möglich ist.

weil $\Phi(a)$ die Summe einer convergenten Reihe ist und eine solche Summe nur einen einzigen Werth haben kann.

Fassen wir nun alles Bisherige zusammen, so ergiebt sich daraus das folgende Theorem:

Entwickelt man eine Funktion $F(x)$ nach dem Mac Laurinschen Theoreme in die Reihe

$$F(x) = F(0) + \frac{x}{1} F'(0) + \frac{x^2}{1.2} F''(0) + \dots.$$

und setzt ganz allgemein

$$x = \varrho(\cos\tau + \sqrt{-1}\sin\tau),$$

so besteht die obige Gleichung unter folgenden Bedingungen: ist r der kleinste unter den Modulis, für welche irgend eine der Funktionen $F(x)$, $F'(x)$, $F''(x)$ etc. aufhört stetig und endlich zu sein, so nimmt man entweder $\varrho < r$ und dann ist τ ganz beliebig, oder $\varrho = r$ und wählt τ so, dass $F(x)$ für dieses System von Werthen noch stetig und endlich bleibt, zugleich aber die Reihe noch convergirt. Für $\varrho > r$ gilt die Funktion der Reihe nicht mehr gleich.

Im ersten Falle also kennt man a priori die Convergenz der Mac Laurin'schen Reihe, im zweiten muss man dieselbe a posteriori erst entscheiden, wozu die in den beiden vorigen Paragraphen entwickelten Regeln dienen. Wir wollen diess auf einige Beispiele anwenden.

I. Die Binomialformel

$$\left.\begin{aligned}&(1+x)^\mu\\ &= 1 + \frac{\mu}{1}x + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1\ 2.3}x^3 + \dots\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

gilt, wie wir bereits wissen, so lange, als der Modulus von x, d. h. bei reellen x der absolute Werth von x, unter der Einheit liegt; es entsteht daher noch die Frage, wie weit dieselbe für $x = +1$ oder $x = -1$ gilt. Diess giebt folgende Untersuchung.

1. Für $x = +1$ wird die fragliche Reihe:

$$1 + \frac{\mu}{1} + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3} + \dots \qquad (2)$$

und die linke Seite bleibt bei beliebigen μ immer noch eine endliche und stetige Funktion für $x = +1$; damit also noch eine Gleichung

zwischen beiden bestehe, ist blos noch Convergenz der Reihe (2) nöthig. Diese entscheidet sich leicht, wenn man die Fälle eines positiven oder negativen μ besonders betrachtet.

Für ein positives μ nämlich giebt es immer zwei ganze positive Zahlen $m-1$ und m, zwischen denen μ enthalten ist, so dass $\mu-(m-1)$ noch positiv ausfällt, dagegen $\mu-m$ negativ wird. Betrachten wir nun das $m$te, $(m+1)$te, $(m+2)$te u. s. f. Glied der Reihe (2) nämlich

$$\frac{(\mu-1)(\mu-2)\dots(\mu-m+1)}{1.2.3\dots m}$$

$$\frac{(\mu-1)(\mu-2)\dots(\mu-m+1)(\mu-m)}{1.2.3\dots m(m+1)},$$

$$\frac{(\mu-1)(\mu-2)\dots(\mu-m+1)(\mu-m)(\mu-m-1)}{1.2.3\dots m(m+1)(m+2)},$$

u. s. w.

so ist das erste derselben noch positiv, das zweite negativ, weil es den negativen Faktor $\mu-m$ enthält, das dritte positiv wegen der zwei negativen Faktoren $\mu-m$, $\mu-(m-1)$, das vierte würde durch seine drei negativen Faktoren wieder negativ werden u. s. f. Man kann also die Reihe (2) in folgender Form darstellen:

$$1+\frac{\mu}{1}+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}+\dots+\frac{\mu(\mu-1)(m-\mu+1)}{1.2\dots(m-1)}$$

$$+\frac{\mu(\mu-1)\dots(\mu-m+1)}{1.2..\,m}\left\{1-\frac{m-\mu}{m+1}+\frac{(m-\mu)(m-\mu+1)}{(m+1)(m+2)}-\dots\right\} \quad (3)$$

und in dieser erkennt man leicht die Convergenz der eingeklammerten Reihe. Da nämlich Grössen von der Form

$$\frac{\alpha}{\beta},\ \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta(\beta+1)},\ \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\beta(\beta+1)(\beta+2)},\ \dots$$

eine bis zur Null hin abnehmende Reihe bilden; sobald nur $\beta>\alpha$ ist, so folgt für $\beta=m+1$, $\alpha=m-\mu$, dass die Glieder der oben in Parenthese stehenden Reihe unter jeden beliebigen Grad der Kleinheit herabkommen, wenn man nur weit genug geht. Die Reihe in (3) d. h. die in (2) convergirt demnach für jedes positive μ.

Wäre dagegen μ negativ etwa $\mu=-\nu$, so geht die Reihe (2) in die folgende über:

$$1-\frac{\nu}{1}+\frac{\nu(\nu+1)}{1.2}-\frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)}{1.2.3}+\dots$$

und da hier Zeichenwechsel stattfindet, so ist zur Convergenz nur noch unbegränzte Abnahme der Glieder nöthig. Diese ist nach dem so eben angeführten Satze nur für $1>\nu$ möglich, während für $\nu \geqq 1$ eine Divergenz der vorstehenden Reihe eintreten würde. Es muss also $\nu<1$ d. i. $-\mu<1$ oder $\mu>-1$ sein. Die Reihe (2) convergirt demnach unter der Bedingung $\infty>\mu>-1$.

2. Für $x=-1$ bleibt die Funktion $(1+x)^\mu$ nur dann stetig und endlich, wenn μ positiv ist; wir müssen also den Fall negativer μ gleich ausschliessen. Die Reihe geht über in:

$$-\frac{\mu}{1}+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}-\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}+\dots, \qquad (4)$$

und wenn wie früher μ zwischen $m-1$ und m enthalten ist, so kann man dafür schreiben:

$$1-\frac{\mu}{1}+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}-\dots+(-1)^{m-1}\frac{\mu(\mu-1)\dots(\mu-m+2)}{1.2\dots(m-1)}$$

$$+(-1)^m\frac{\mu(\mu-1)\dots(\mu-m+1)}{1.2\dots m}\left\{1+\frac{m-\mu}{m+1}+\frac{(m-\mu)(m-\mu+1)}{(m+1)(m+2)}+\dots\right\} (5)$$

indem man eine der vorigen ganz analoge Betrachtung anwendet. Die hier eingeklammerte Reihe convergirt aber, denn wenn man sie mit der folgenden

$$1+\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta(\beta+1)}+\dots, \quad \beta>\alpha+1$$

vergleicht, so findet man, dass die Bedingung $\beta>\alpha+1$ erfüllt ist, mithin convergirt auch die Reihe (5) d. h. die in no. (4). Wollte man dagegen in no. (4) $\mu=-\nu$ setzen, so würde man finden, dass die entstehende Reihe für jedes ν divergirt, was sich auch im Voraus erwarten liess.

Fassen wir nun die unter 1. und 2. gefundenen Resultate zusammen, so ergiebt sich Folgendes: die Gleichung

$$(1+x)^\mu$$

$$=1+\frac{\mu}{1}x+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}x^3\dots$$

gilt so lange $1 > x > -1$ ist für jedes μ; nimmt man aber $x = +1$, so muss $\infty > \mu > -1$ und für $x = -1$, $\infty > \mu \geqq 0$ sein.

Ganz ebenso kann man mit den allgemeineren Reihen (7) und (8) in §. 42. verfahren, worin $\varrho < 1$ sein muss. Für $\varrho = 1$ gehen die Funktionen auf der linken Seite über in

$$(2\cos\frac{1}{2}\tau)^\mu \cos(\mu \operatorname{Arctan}(\tan\frac{1}{2}\tau)),$$

$$(2\cos\frac{1}{2}\tau)^\mu \sin(\mu \operatorname{Arctan}(\tan\frac{1}{2}\tau)),$$

welche stetig und endlich bleiben für alle μ, so lange $\tau < \pi$ ist. Denn für $\tau = \pi$ also $\frac{1}{2}\tau = \frac{\pi}{2}$ ändert sich $\tan\frac{1}{2}\tau$ unstetig, indem hier die beiden Werthe $\operatorname{Lim}\tan(\frac{\pi}{2} - \delta) = +\infty$ und $\operatorname{Lim}\tan(\frac{\pi}{2} + \delta) = -\infty$ eintreten; demnach hat $\operatorname{Arctan}(\tan\frac{\pi}{2})$ die beiden Werthe $\operatorname{Arctan}(+\infty) = +\frac{\pi}{2}$ und $\operatorname{Arctan}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$, und folglich werden die beiden obigen Funktionen für $\tau = \pi$ unstetig; dagegen bleiben sie für $\pi > \tau > -\pi$. immer stetig und endlich, weil der erste Faktor selbst für negative μ unter der angegebenen Bedingung nicht unendlich wird. Was nun noch die Reihen

$$1 + \frac{\mu}{1}\cos\tau + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}\cos 2\tau + \dots.$$

und

$$\frac{\mu}{1}\sin\tau + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}\sin 2\tau + \dots.$$

anbetrifft, so ist klar, dass dieselben convergiren müssen, wenn die folgende

$$1 + \frac{\mu}{1} + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} + \dots$$

convergirt, was für $\infty > \mu > -1$ der Fall ist. Berücksichtigt man noch, dass für $\pi > \tau > -\pi$, $\operatorname{Arctan}(\tan\frac{1}{2}\tau) = \frac{1}{2}\tau$ ist, so ergiebt sich jetzt

$$(2\cos\frac{1}{2}\tau)^\mu \cos\frac{\mu}{2}\tau$$

$$= 1 + \frac{\mu}{1}\cos\tau + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}\cos 2\tau + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}\cos 3\tau + \dots$$

$$(2\cos\frac{1}{2}\tau)^{\mu} \sin\frac{\mu}{2}\tau$$

$$= \frac{\mu}{1}\sin\tau + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}\sin 2\tau + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}\sin 3\tau + \dots$$

$$\infty > \mu > -1, \pi > \tau > -\pi.$$

Was für unrichtige Resultate für $\tau > \pi$ herauskommen, kann man leicht an einzelnen Beispielen sehen. So gäbe die zweite Gleichung für $\tau = 2\pi$,

$$(-2)^{\mu} \sin\mu\pi = 0,$$

was ganz falsch ist, da μ u. A. einen beliebigen ächten Bruch bedeuten kann.

II. In den Gleichungen (9) und (10) des §. 42., welche für $\varrho < 1$ gelten, stehen für $\varrho = 1$ auf der linken Seite die Funktionen

$$\frac{1}{2}l(2\cos\frac{1}{2}\tau)^2 \text{ und } \operatorname{Arctan}(\tan\frac{1}{2}\tau),$$

die für $\pi > \tau > -\pi$ stetig und endlich bleiben, während für $\tau = \pi$ die erste unendlich und die zweite unstetig wird. Da ferner leicht erhellt, dass die Reihen

$$\frac{1}{1}\cos\tau - \frac{1}{2}\cos 2\tau + \frac{1}{3}\cos 3\tau - \dots$$

und

$$\frac{1}{1}\sin\tau - \frac{1}{2}\sin 2\tau + \frac{1}{3}\sin 3\tau - \dots$$

immer convergiren, so ergiebt sich jetzt

$$l(2\cos\frac{1}{2}\tau) = \frac{1}{1}\cos\tau - \frac{1}{2}\cos 2\tau + \frac{1}{3}\cos 3\tau - \dots$$

$$\frac{1}{2}\tau = \frac{1}{1}\sin\tau - \frac{1}{2}\sin 2\tau + \frac{1}{3}\sin 3\tau - \dots$$

$$\pi > \tau > -\pi.$$

Für $\tau = \frac{\pi}{2}$ erhält man aus der zweiten Reihe das bemerkenswerthe Resultat

$$\frac{1}{4}\pi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

auf welches wir gleich nachher zurückkommen werden.

III. Berücksichtigt man, dass die Funktion Arcsin x für $x=1$ noch stetig und endlich, zugleich auch die Reihe

$$\frac{x}{1}+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7}+\ldots,$$

für den nämlichen Werth von x noch convergent bleibt*), so erkennt man, dass die Gleichung (1) in §. 46. noch für $x=1$ Bestand hat; diess giebt eine Reihe zur Berechnung der Ludolph'schen Zahl nämlich:

$$\frac{\pi}{2}=1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7}+\ldots$$

die aber ihrer schwachen Convergenz wegen nur eine sehr langsame Annäherung darbietet.

IV. Da die Funktion Arctan x für $x=1$ noch stetig und endlich bleibt und die Reihe

$$\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots$$

für $x=1$ noch convergirt, so hat man gemäss der Formel (4) in §. 46.

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$$

oder auch durch Vereinigung zweier Glieder

$$\frac{\pi}{8}=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{5.7}+\frac{1}{9.11}+\ldots$$

---

*) Es ist nämlich durch Vergleichung mit $u_0+u_1+u_2+$ etc.,

$$u_n=\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}\cdot\frac{1}{2n+1},\quad u_{n+1}=\frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{2.4.6\ldots(2n+2)}\cdot\frac{1}{2n+3}$$

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}-1=\frac{(2n+2)(2n+3)}{(2n+1)^2}-1=\frac{6n+5}{(2n+1)^2},$$

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=\frac{n}{2n+1}\cdot\frac{6n+5}{2n+1}=\frac{1}{2+\frac{1}{n}}\cdot\frac{6+\frac{5}{n}}{2+\frac{1}{n}},$$

$$\text{Lim}\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\right]=\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{2}=\frac{3}{2}>1$$

und folglich nach §. 49. die Reihe eine convergente.

Aber auch diese Reihe convergirt für die praktische Berechnung viel zu langsam; denn bezeichnen wir die Glieder der Reihe nach mit u_1, u_2, u_3 etc., so ist

$$u_n = \frac{1}{(4n-3)(4n-1)}$$

und wenn man also so weit gehen wollte, dass u_n keinen Einfluss auf die 7te Dezimalstelle haben sollte, so müsste $u^n < \frac{1}{10^7}$ sein oder

$$(4n-3)(4n-1) > 10^7.$$

Durch Auflösung dieser quadratischen Ungleichung findet man $n > 750$, so dass also über 750 Glieder zu addiren wären, wenn man $\frac{\pi}{8}$ nur auf 7 Dezimalen berechnen wollte.

Besser kommt man dagegen mit Hülfe der Formel (6) in §. 46. zum Ziele, wenn man nämlich die beliebigen Brüche α und β so wählt, dass

$$\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta} = 1 \text{ mithin } \operatorname{Arctan} \frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta} = \frac{\pi}{4}$$

ist. Diess kann sehr leicht geschehen, wenn man die erste dieser Gleichungen nach β auflöst, wodurch

$$\beta = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$

wird und folglich β immer ächt gebrochen ausfällt, sobald man $\alpha < 1$ nimmt. So ergiebt sich z. B. für $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{3}$ und mithin vermöge der Formel (6)

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1.2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} - \ldots$$
$$+ \frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} - \ldots,$$

wonach die Berechnung von π sehr leicht ist.

§. 52.

Das Theorem von Taylor für Funktionen mehrerer Variablen.

So wie am Ende des §. 35. das Taylorsche Theorem aus den Mac Laurinschen abgeleitet wurde, so ist es auch sehr leicht, die Bedingungen, unter welchen jenes besteht, aus denen zu entwickeln, welche für die Gültigkeit dieses letzteren hinreichend und nothwendig sind. Man wird sich nämlich sehr leicht überzeugen, dass wenn r den Modulus von x, ϱ den von h und r_1 den kleinsten der Moduli bezeichnet, für welche irgend eine der Funktionen $F(x)$, $F'(x)$, $F''(x)$ etc. unstetig oder unendlich wird, der Modulus von h zwischen denen von r und r_1 liegen muss, wenn die Gleichung

$$F(x+h)=F(x)+\frac{h}{1}F'(x)+\frac{h^2}{1.2}F''(x)+\ldots$$

gelten soll. — Es ist auch nicht schwer, diese Gleichung auf Funktionen mehrerer Variablen auszudehnen. Sehen wir z. B. in der Funktion $F(x,y)$ vorerst y als constant an, so können wir nach dem Obigen

$$F(x+h,y)=F(x,y)+\frac{h}{1}\frac{dF(x,y)}{dx}+\frac{h^2}{1.2}\frac{d^2F(x,y)}{dx^2}+\ldots$$

setzen, wobei sämmtliche Differenzialquotienten partielle sind. Lassen wir jetzt y um k wachsen, so ist auf jedes Glied der rechten Seite der Taylorsche Satz selbst wieder anwendbar, wodurch man unter der Bemerkung, dass überhaupt

$$\frac{d^m\left\{\frac{d^nF(x,y)}{dx^n}\right\}}{dy^m}=\frac{d^{m+n}F(x,y)}{dy^m\,dx^n}$$

ist, sehr leicht die folgende Gleichung erhält:

$$\begin{aligned}F(x+h,y+k)=F(x,y)&+\frac{k}{1}\frac{dF(x,y)}{dy}+\frac{k^2}{1.2}\frac{d^2F(x,y)}{dy^2}+\ldots\\&+\frac{h}{1}\left\{\frac{dF(x,y)}{dx}+\frac{k}{1}\frac{d^2F(x,y)}{dy\,dx}+\frac{k^2}{1.2}\frac{d^3F(x,y)}{dy^2dx}+\ldots\right\}\\&+\frac{h^2}{1.2}\left\{\frac{d^2F(x,y)}{dx^2}+\frac{k}{1}\frac{d^3F(x,y)}{dy\,dx^2}+\frac{k^2}{1.2}\frac{d^4F(x,y)}{dy^2dx^2}+\ldots\right\}\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots,\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Nimmt man hier die Glieder diagonalweis zusammen, so ergiebt sich auch

$$F(x+h,y+k)=F(x,y)+\frac{h}{1}\frac{dF(x,y)}{dx}+\frac{k}{1}\frac{dF(x,y)}{dy}$$
$$+\frac{h^2}{1.2}\frac{d^2F(x,y)}{dx^2}+\frac{h}{1}\frac{k}{1}\frac{d^2F(x,y)}{dx\,dy}+\frac{k^2}{1.2}\frac{d^2F(x,y)}{dy^2}$$
$$+\frac{h^3}{1.2.3}\frac{d^3F(x,y)}{dx^3}+\frac{h^2}{1.2}\frac{k}{1}\frac{d^3F(x,y)}{dx^2dy}+\frac{h}{1}\frac{k^2}{1.2}\frac{d^3F(x,y)}{dx\,dy^2}+\frac{k^3}{1.2.3}\frac{d^3F(x,y)}{dy^3}.$$

Bezeichnet man die einzelnen Horizontalreihen kurz mit u_1, u_2, u_3 etc., setzt also

$$F(x+h,y+k)=F(x,y)+u_1+u_2+u_3+\ldots$$

so ist überhaupt für ein ganzes positives n

$$u_n=\frac{h^n}{1.2..n}\frac{d^nF(x,y)}{dx^n}+\frac{h^{n-1}}{1.2..(n-1)}\frac{k}{1}\frac{d^nF(x,y)}{dx^{n-1}dy}$$
$$+\frac{h^{n-2}}{1.2..(n-2)}\frac{k^2}{1.2}\frac{d^nF(x,y)}{dx^{n-2}dy^2}+\ldots+\frac{k^n}{1.2..n}\frac{d^nF(x,y)}{dy^n}.$$

Denkt man sich auf der rechten Seite als gemeinschaftlichen Faktor die Grösse

$$\frac{1}{1.2.3..(n-1)n}$$

abgesondert, so erhalten die in der so herbeigeführten Parenthese stehenden Differentialquotienten die folgenden Coeffizienten

$$1,\ \frac{n}{1}=n_1,\ \frac{n(n-1)}{1.2}=n_2,\ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}=n_3,\ \text{etc.}$$

und folglich ist

$$u_n=\frac{1}{1.2..n}\left\{\frac{d^nF(x,y)}{dx^n}h^n+n_1\frac{d^nF(x,y)}{dx^{n-1}dy}h^{n-1}k+n_2\frac{d^nF(x,y)}{dx^{n-2}dy^2}h^{n-2}k^2+\ldots\right\}$$

und mithin nach dem früheren

$$F(x+h,y+k)=F(x,y)+\frac{1}{1}\left\{\frac{dF(x,y)}{dx}h+\frac{dF(x,y)}{dy}k\right\}$$
$$+\frac{1}{1.2}\left\{\frac{d^2F(x,y)}{dx^2}h^2+2\frac{d^2F(x,y)}{dx\,dy}hk+\frac{d^2F(x,y)}{dy^2}k^2\right\}$$
$$+\frac{1}{1.2.3}\left\{\frac{d^3F(x,y)}{dx^3}h^3+3\frac{d^3F(x,y)}{dx^2dy}h^2k+3\frac{d^3F(x,y)}{dx\,dy^2}hk^2+\frac{d^3F(x,y)}{dy^3}k^3\right\}$$

und hier muss nun die Funktion $F(x,y)$ in Bezug auf x sowohl als auf y die Bedingungen erfüllen, welche früher blos in Beziehung auf x allein nöthig waren.

In ganz ähnlicher Weise liesse sich das Taylorsche Theorem auch auf Funktionen von drei, vier etc. Variabelen ausdehnen, doch sind alle diese Formeln wegen ihrer complizirten Gestalt nur von beschränkter Anwendung.

Cap. IX. Das Theorem von Lagrange.

§. 53.

Kennzeichen für die Entwickelbarkeit impliziter Funktionen.

Die Theoreme von Taylor und Mac Laurin setzen voraus, dass die Funktion $F(x)$ oder $F(x+h)$, welche in eine Reihe verwandelt werden soll, eine völlig bekannte oder entwickelte (explizite) sei und zeigen in diesem Falle die zur Entwickelung nöthigen Rechnungsoperationen; aber eben diese Operationen würden sich, wenigstens unmittelbar, gar nicht ausführen lassen, wenn die zu entwickelnde Funktion ihrer Form nach unbekannt und nur eine Bedingungsgleichung gegeben wäre, welche dieselbe erfüllen soll. Es entsteht daher die Frage, durch welche Mittel eine solche implizite Funktion einer Variabelen in eine Reihe, welche nach steigenden Potenzen der letzteren fortschreitet, verwandelt werden könnte. Denken wir uns z. B. zwischen den Grössen x und y eine Gleichung wie

$$\Phi(x, y) = 0 \qquad (1)$$

gegeben, so ist offenbar y eine gewisse erst noch zu entwickelnde Funktion von x etwa $y = \varphi(x)$, die sich vielleicht auch in eine Reihe von der Form

$$\varphi(x) = A + Bx + Cx^2 + \dots$$

verwandeln liesse; es würde nur darauf ankommen, die Grössen A, B, C etc. zu bestimmen. Noch allgemeiner wird die Aufgabe, wenn man nicht y selbst, sondern eine gegebene Funktion $F(y) = F[\varphi(x)]$ verwandelt wissen wollte. Der zunächst liegende Gedanke wäre nun, die Gleichung (1) vorerst aufzulösen und auf die so entwickelte Funktion $y = \varphi(x)$ das Mac Laurinsche Theorem anzuwenden, aber diess ist auch gerade der nur selten verfolgbare Weg, weil die allgemeine Auflösung eben jener Gleichung ganz unmöglich wird, sobald darin x und

y als höhere Potenzen oder in nicht algebraischer Form erscheinen. Man muss sich daher nach einer von dieser Schwierigkeit freien Methode umsehen, und wenn sich eine solche finden lässt, so hat man darin umgekehrt ein Mittel, um dergleichen unauflösbare Gleichungen wie (1) durch Reihen aufzulösen, in so fern man nämlich wenigstens eine ihrer Wurzeln in eine Reihe verwandeln kann. Bevor wir uns aber nach einer solchen Methode umsehen, müssen wir zuerst die Bedingungen aufsuchen, unter welchen das Problem selbst nur überhaupt lösbar ist und hierzu dienen die folgenden Betrachtungen.

Um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, nehmen wir an, es sei

$$\Phi(x,y) = y - xf(y) = 0 \tag{2}$$

und darin $f(y)$ eine bekannte (explizite) Funktion von y allein, welche für $y=0$ weder Null noch unendlich gross wird und auch immer stetig bleibt. Obgleich man nun nicht weiss, welche Form hier y als Funktion von x gedacht haben wird, so ist es doch nicht schwer, die successiven Differentialquotienten von y in Bezug auf x zu entwickeln; durch Anwendung des Satzes:

$$\text{für } \Phi(x,y) = 0 \text{ ist } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d\Phi(x,y)}{dx}}{\frac{d\Phi(x,y)}{dy}}$$

erhält man nämlich in unserem Falle sehr leicht

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-f(y)}{1 - xf'(x)}. \tag{3}$$

Differenzirt man diess mehrmals nach x, so findet man für $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, etc. Brüche, deren Zähler theils x, theils $f(y)$, $f'(y)$, $f''(y)$ etc. enthalten und deren Nenner aus ganzen Potenzen von $1-xf'(y)$ bestehen. Sind nun $f(y)$, $f'(y)$, $f''(y)$ etc. durchweg stetige Funktionen von y (oder x), so ändern sich auch jene Zähler und Nenner stetig; wenn aber die Quotienten keine Unterbrechung der Continuität erleiden oder unendlich werden sollen, so darf keiner der Nenner in Null übergehen, was für

$$1 - xf'(y) = 0 \tag{4}$$

der Fall sein würde. Nennen wir ξ_0, ξ_1, etc. die nach ihrer Grösse aufsteigend geordneten Werthe von x, welche den Bedingungen (2) und

(4) gleichzeitig genügen, so ist klar, dass die Differenz $1-xf'(y)$ von Null verschieden bleibt, wenn $x<\xi_0$, oder $>\xi_0$ und $<\xi_1$, oder $>\xi_1$ und $<\xi_2$ etc. ist. Aus diesem Allen zusammen folgt nun, dass die Differenzialquotienten

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots.$$

stetig und endlich bleiben, wenn

$$x<\xi_0 \text{ oder } \xi_0<x<\xi_1 \text{ oder } \xi_1<x<\xi_2 \text{ etc.}$$

ist. Das Nämliche findet auch mit der Funktion y selbst statt, weil aus der Stetigkeit und Endlichkeit von $\frac{dy}{dx}$ die von y folgt.

Unter den Wurzeln der Gleichung (2) d. h. unter den verschiedenen Funktionen $y=\varphi(x)$, welche derselben genügen können, giebt es nun offenbar eine, welche mit x zugleich verschwindet, und diese möge die kleinste heissen; lassen wir daher x das Intervall $x=0$ bis $x=\xi_0$ durchlaufen, so bleiben innerhalb desselben die Funktionen y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc. stetig und endlich und folglich lässt sich die kleinste Wurzel y in eine nach steigenden Potenzen von x fortgehende Reihe verwandeln, sobald der Modulus von x weniger als der von ξ_0 beträgt. Die Grösse ξ ist aber nicht schwer zu finden, weil sie den Gleichungen (2) und (4) zugleich genügen muss; man hat nämlich:

$$x=\frac{f(y)}{y} \quad \text{und} \quad x=\frac{1}{f'(y)} \tag{5}$$

folglich durch Elimination von x

$$f(y)=yf'(y). \tag{6}$$

Die letzte Gleichung enthält nur y und ist also eine blos numerische; aus ihr erhält man für y gewisse Werthe (Wurzeln), die wir mit η_0 η_1, η_2, ... bezeichnen. Die Gleichungen (5) geben dann ebensoviel Werthe für x, die ξ_0, ξ_1, etc. heissen mögen, wenn sie so geordnet sind, dass $\xi_0<\xi_1<\xi_2$ etc. ist.

Um das Vorhergehende — den Grundpfeiler der ganzen Untersuchung — an einem Beispiele zu erläutern, sei $f(y)=\frac{1}{2}y^2+y+1$ also diejenige Funktion y in eine Reihe zu verwandeln, welche der Gleichung

$$y - x\left(\frac{1}{2}y^2 + y + 1\right) = 0 \qquad (7)$$

Genüge leistet. Hier hat man zur Bestimmung der η gemäss Formel (6)

$$\frac{1}{2}y^2 + y + 1 = y(y+1),$$

woraus für y die beiden Werthe

$$\eta_0 = +\sqrt{2}\ ,\ \eta_1 = -\sqrt{2}$$

folgen. Da nun nach no. (5) $x = \frac{1}{y+1}$ sein muss, so erhalten wir für x die Werthe

$$\xi_0 = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1\ ,\ \xi_1 = \frac{1}{1-\sqrt{2}} = -(\sqrt{2}+1).$$

Da nun hier der Modulus (absolute Werth) von ξ_0 weniger als der von ξ_1 beträgt, so ist die kleinste Wurzel der Gleichung (7) für diejenigen x in eine Reihe verwandelbar, deren Modulus $< \sqrt{2}-1$ ist. Diess lässt sich auch leicht direkt nachweisen; aus (7) folgt nämlich

$$y = \frac{1-x \pm \sqrt{1-2x-x^2}}{x}.$$

Die kleinere Wurzel ist hier

$$y = \frac{1-x-\sqrt{1-2x-x^2}}{x},$$

von welcher man leicht nachweisen kann, dass sie für $x=0$ sich annullirt. Will man nun auf die Quadratwurzel im Zähler die Formel

$$\sqrt{1-z} = 1 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2.4}z^2 - \frac{1.3}{2.4.6}z^3 - \ldots$$
$$1 > z > -1$$

anwenden, so muss der absolute Werth von $2x + x^2$ weniger als 1 betragen, woraus wieder $x < \sqrt{2}-1$ folgt wie oben.

Nennen wir jetzt y' die kleinste Wurzel der Gleichung

$$y - xf(y) = 0,$$

so können wir setzen

$$y - xf(y) = (y-y')\,\psi(y), \qquad (8)$$

wo $\psi(y)$ eine neue Funktion von y bedeutet, von der wir zwar nicht

die Form, aber wenigstens einige Eigenschaften angeben können. Denken wir uns nämlich in der vorstehenden Gleichung y als willkührliche Veränderliche, so erhellt auf der Stelle, dass wegen der Continuität und Endlichkeit von $f(y)$ die Funktion

$$\psi(y) = \frac{y - xf(y)}{y - y'}$$

weder unstetig noch unendlich wird, so lange y von y' verschieden bleibt, und das Nämliche gilt von den Differenzialquotienten derselben; ebenso leicht überzeugt man sich, dass für $y = 0$ die fragliche Funktion weder verschwindet noch unendlich wird. Nimmt man ferner die Logarithmen der Gleichung (8), nachdem man sie in folgender Form

$$1 - x\frac{f(y)}{y} = \left(1 - \frac{y'}{y}\right) \psi(y)$$

geschrieben hat, so ergiebt sich leicht

$$-l\left[1 - x\frac{f(y)}{y}\right] = -l\left(1 - \frac{y'}{y}\right) - l\psi(y), \qquad (9)$$

und da $\psi(y)$ für $y = 0$ weder Null noch unendlich wurde, so wird $l\psi(y)$ für $y = 0$ nicht unendlich und bleibt wegen der Stetigkeit von $\psi(y)$, $\psi'(y)$, $\psi''(y)$, etc. ebenfalls sammt seinen Differenzialquotienten stetig. Hieraus folgt, dass $l\psi(y)$ sich in eine Reihe von der Form

$$l\psi(y) = b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + \ldots \qquad (10)$$

verwandeln lassen muss, wenigstens innerhalb eines gewissen Intervalles für y. Da ferner in (9) y' die mit x gleichzeitig verschwindende Wurzel der Gleichung $y - xf(y) = 0$ bedeutet, während die anderen Wurzeln y für $x = 0$ im Allgemeinen nicht verschwinden, so nähert sich der Quotient $\frac{y'}{y}$ für abnehmende x der Gränze Null, woraus folgt, dass wenigstens innerhalb eines kleinen Intervalles (in Bezug auf x) $y > y'$ sein muss, so dass also die Gleichung

$$-l\left(1 - \frac{y'}{y}\right) = \frac{1}{1}\frac{y'}{y} + \frac{1}{2}\left(\frac{y'}{}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{y}{y}\right)^3 + \cdots$$

gilt. Es wird also nach no. (10)

$$-l\left[1 - x\frac{f(y)}{y}\right] = \frac{1}{1}\frac{y'}{y} + \frac{1}{2}\left(\frac{y'}{y}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{y'}{y}\right)^3 + \cdots$$
$$+ \left[b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + \ldots\right] \qquad (11)$$

Auf der rechten Seite lässt sich nun y' (aber nicht y) unter gewissen Bedingungen, die wir vorhin kennen lernten, in eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe verwandeln, und das Nämliche gilt auch von y'^2, y'^3 etc., weil diese letzteren Funktionen unter den nämlichen Bedingungen stetig und endlich bleiben wie y'. Denkt man sich diese Verwandlungen ausgeführt und hieraus diejenigen Glieder zusammengenommen, die gleiche Potenzen von x zu Faktoren haben, so folgt, dass die rechte Seite der Gleichung (11) in eine nach steigenden Potenzen von x fortschreitende Reihe verwandelt werden kann, wobei die Coeffizienten dieser Potenzen theils positive theils negative Poten zen von y enthalten. Was aber von der einen Seite einer identischen Gleichung gilt, muss auch von der anderen gelten und mithin muss sich auch die linke Seite der Gleichung (11) in eine gleiche Reihe entwickeln lassen, wobei das folgende Resultat zum Vorschein kommt:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{y}\cdot\frac{y'}{1}+\frac{1}{y^2}\cdot\frac{y'^2}{2}+\frac{1}{y^3}\cdot\frac{y'^3}{3}+\cdots \\ &-[b_0+b_1 y+b_2 y^2+\ldots.] \\ =\ &\frac{x}{1}\frac{f(y)}{y}+\frac{x^2}{2}\left[\frac{f(y)}{y}\right]^2+\frac{x^3}{3}\left[\frac{f(y)}{y}\right]+\ldots, \end{aligned} \tag{12}$$

in welchem nur die Anordnung die umgekehrte ist.

§. 54.

Reihenentwickelung für implizite Funktionen.

Da die Funktion $f(y)$ nebst ihren Differenzialquotienten als stetig und endlich vorausgesetzt wurde, so ist auf dieselbe das Mac Laurin'sche Theorem anwendbar, und das Nämliche gilt vom $[f(y)]^2$, $[f(y)]^3$ etc. Bezeichnen wir zur Abkürzung $f(y)$ mit Y und mit $(D^n Y)_{(0)}$ den Werth, welchen $\frac{d^n f(y)}{dy^n}$ bekommt, sobald man nach geschehener Differenziation $y=0$ setzt, so gelten jetzt die Gleichungen:

$$f(y)=Y_{(0)}+\frac{y}{1}(DY)_{(0)}+\frac{y^2}{1.2}(D^2Y)_{(0)}+\frac{y^3}{1.2.3}(D^3Y)_{(0)}+\ldots,$$

$$[f(y)]^2=Y^2{}_{(0)}+\frac{y}{1}(DY^2)_{(0)}+\frac{y^2}{1.2}(D^2Y^2)_{(0)}+\frac{y^3}{1.2.3}(D^3Y^2)_{(0)}+\ldots,$$

$$[f(y)]^3=Y^3{}_{(0)}+\frac{y}{1}(DY^3)_{(0)}+\frac{y^2}{1.2}(D^2Y^3)_{(0)}+\frac{y^3}{1.2.3}(D^3Y^3)_{(0)}+\ldots$$

u. s. f.,

und wenn wir diese Werthe in die Gleichung (12) substituiren und darauf Alles nach Potenzen von y ordnen, so ergiebt sich:

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{y'}{1}+\frac{1}{y^2}\cdot\frac{y'}{2}+\frac{1}{y^3}\cdot\frac{y'^3}{3}+\ldots.$$
$$-\left[b_0+b_1 y+b_2 y^2+\ldots.\right.$$
$$=\frac{1}{y}\left\{\frac{x}{1}\,Y_{(0)}+\frac{x^2}{1.2}(DY^2)_{(0)}+\frac{x^3}{1.2.3}\,(D^2Y^3)_{(0)}+\ldots.\right\}$$
$$+\frac{1}{y^2}\left\{\frac{x^2}{2}Y^2{}_{(0)}+\frac{x^3}{1.3}\,(DY^3)_{(0)}+\ldots.\right\}$$
$$+\frac{1}{y^3}\left\{\frac{x^3}{3}\,Y^3{}_{(0)}+\ldots\ldots..\right\}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{x}{1^2}(DY)_{(0)}+\frac{x^2}{1.2^2}(D^2Y^2)_{(0)}+\frac{x^3}{1.2.3^2}(D^3\,Y^3)_{(0)}+\ldots.$$
$$+y\left\{\frac{x}{1^2.2}(D^2\,Y)_{(0)}+\frac{x^2}{1.2^2.3}\,(D^3\,Y^2)_{(0)}+\ldots.\right\}$$
$$+y^2\left\{\frac{x}{1^2.2.3}\,(D^3\,Y)_{(0)}+\ldots.\right\}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Aus der Bemerkung nun, dass die Coeffizienten gleicher Potenzen von y einander gleich sein müssen, ergeben sich jetzt eine Menge von Gleichungen, welche theils zur Kenntniss von y', y'^2, y'^3 etc., theils zu der von b_0, b_1, b_2 etc. führen. Das Letztere ist hier weniger wesentlich, dagegen ist die Gleichung, welche sich durch Vergleichung der Coeffizienten von $\frac{1}{y^2}$ ergiebt, nämlich

$$y'=\frac{x}{1}\,Y_{(0)}+\frac{x^2}{1.2}(DY^2)_{(0)}+\frac{x^3}{1.2.3}\,(D^2\,Y^3)_{(0)}+\ldots\quad(1)$$

von hauptsächlichem Werthe, denn sie enthält geradezu die Auflösung unserer Aufgabe, die kleinste Wurzel y' der Gleichung $y-xf(y)=0$ in eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe zu verwandeln. Die Bedingungen, unter welchen die obige Formel richtig bleibt, bestehen, wie wir bereits wissen, darin, dass $f(y)=Y$, $f'(y)=DY$, etc. stetige und endliche Funktionen von y sind, deren erste für $y=0$ nicht verschwindet, und dass endlich der Modulus von x kleiner als der Modulus des kleinsten x ist, welches man durch Auflösung der Gleichungen

$$f(y) = yf'(y)\,,\; x = \frac{1}{f'(y)} = \frac{y}{f(y)} \qquad (2)$$

erhält. — Wir wollen diess zunächst durch einige Beispiele erläutern.

I. Für $Y = f(y) = e^y$ wird

$$D^{n-1} Y^n = D^{n-1} e^{ny} = n^{n-1} e^{ny},$$
$$(D^{n-1} Y^n)_{(0)} = n^{n-1}.$$

Die kleinste Wurzel der Gleichung $y - xe^y = 0$ ist also:

$$y' = \frac{1^0 x}{1} + \frac{2^1 x^2}{1.2} + \frac{3^2 x^3}{1.2.3} + \cdots \qquad (3)$$

Die Gleichungen (2) sind hier

$$e^y = ye^y\,,\; x = \frac{1}{e^y}$$

d. i. $y = 1$, $x = \frac{1}{e}$. Die Formel (3) gilt demnach nur so lange, als der Modulus von x weniger als $\frac{1}{e}$ beträgt. Diess kann man auch leicht auf anderem Wege einsehen. Um nämlich die Convergenz der Reihe zu beurtheilen, hat man

$$u_n = \frac{n^{n-1} x^n}{1.2..n}\,,\; u_{n+1} = \frac{(n+1)^n x^{n+1}}{1.2...(n+1)},$$
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}} \cdot \frac{x}{n+1} = (1 + \frac{1}{n})^n \frac{n}{n+1}\, x;$$

folglich

$$\mathrm{Lim}\, \frac{u_{n+1}}{u_n} = ex,$$

und wenn diess < 1 sein soll, so folgt $x < \frac{1}{e}$ wie vorhin; für $x \geqq \frac{1}{e}$ dagegen divergirt die Reihe und gilt dann der Funktion y' nicht mehr gleich.

II. Für $Y = f(y) = \cos y$ findet sich $D^{n-1} \cos^n y$ auf folgende Weise.

Wegen

$$\cos y = \frac{e^{yi} + e^{-yi}}{2}\,,\; i = \sqrt{-1}$$

hat man

$$\cos^n y = \frac{1}{2^n} \{ e^{nyi} + n_1 e^{(n-2)yi} + n_2 e^{(n-4)yi} + \ldots \}$$

folglich

$$D^{n-1}\cos^n y = \frac{1}{2^n}\{(ni)^{n-1}e^{nyi} + n_1((n-2)i)^{n-1}e^{(n-2)yi} \\ + n_2((n-4)i)^{n-1}e^{(n-4)yi} + \ldots\}$$

$$(D^{n-1}\cos^n y)_{(0)} = \frac{i^{n-1}}{2^n}\{n^{n-1} + n_1(n-2)^{n-1} + n_2(n-4)^{n-1} + \ldots\}$$

Für gerade n, also ungerade $n-1$, heben sich in der eingeklammerten Reihe die ersten und letzten, zweiten und vorletzten Glieder auf; nämlich:

$$n^{n-1} \text{ gegen } (n-2n)^{n-1} = -n^{n-1},$$
$$n_1(n-2)^{n-1} \quad \text{,,} \quad n_{n-1}(n-2n+2)^{n-1} = -n_1(n-2)^{n-1},$$
u. s. w.,

und folglich ist

$$(D^{n-1}\cos^n y)_{(0)} = 0$$

für gerade n. Dagegen hat man für ungerade n also gerade $(n-1)$

$$(D^{n-1}\cos^n y)_{(0)} = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2^n}\{n^{n-1} + n_1(n-2)^{n-1} + n_2(n-4)^{n-1} + \ldots\} \quad (4)$$

oder

$$(D^{n-1}Y^n)_{(0)} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}a_n,$$

wenn zur Abkürzung

$$a_n = \frac{1}{2^n}\{n^{n-1} + n_1(n-2)^{n-1} + n_2(n-4)^{n-1} + \ldots .\}$$

gesetzt wird. Nach Formel (1) ergiebt sich nun, dass die kleinste Wurzel der Gleichung:

$$y - x\cos y = 0$$

ausgedrückt wird durch

$$y' = \frac{a_1 x}{1} - \frac{a_3 x^3}{1.2.3} + \frac{a_5 x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots . \quad (5)$$

Um die Grenzen für die Gültigkeit dieser Reihe zu bestimmen, müssen wir zunächst die Gleichung:

$$\cos y = -y\sin y \quad \text{oder} \quad y + \cot y = 0 \quad (6)$$

auflösen. Man übersieht sogleich, dass die reellen Wurzeln dieser

Gleichung zwischen $y = \frac{\pi}{2}$ und $y = \pi$, $y = \frac{3\pi}{2}$ und $y = 2\pi$ etc. zu suchen sind, weil y und $\cot y$ von entgegengesetztem Zeichen sein müssen. Um auch noch zu erfahren, zwischen welchen Gränzen die Moduli der imaginären Wurzeln liegen, nehmen wir $y = zi$, wodurch

$$\cot y = -i\frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}} = -i\left(1 + \frac{2}{e^{2z} - 1}\right)$$

wird und die Gleichung $y + \cot y = 0$ in die folgende übergeht:

$$z - 1 - \frac{2}{e^{2z} - 1} = 0.$$

Für $z = 1$ wird die linke Seite negativ, dagegen für $z = 2$ positiv und folgl. liegt eine Wurzel dieser Gleichung zwischen 1 und 2. Genauere Rechnung giebt $z = 1{,}199678\ldots$ und folglich ist $y = (1{,}199678\ldots)\sqrt{-1}$ die erste imaginäre Wurzel der Gleichung $y + \cot y = 0$. Diess ist auch die kleinste Wurzel, weil ihr Modulus weniger beträgt als $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$ etc. Vermöge der zweiten Formel in no. (2) ist nun in unserem Falle:

$$x = \frac{1}{-\sin y} = \frac{y}{\cos y},$$

woraus man leicht

$$x = \sqrt{1 + y^2}$$

findet. Diess giebt als kleinsten Werth von x:

$$x = \sqrt{1 - (1{,}199678\ldots)^2} = (0{,}662742\ldots)\sqrt{-1},$$

und folglich ist $0{,}622742\ldots$ der kleinste Modulus von x. Die Gleichung (5) besteht demnach nur für

$$\operatorname{mod} x < 0{,}662742\ldots \tag{7}$$

III. Es sei $f(y) = y^m + a$, also die kleinste Wurzel der Gleichung

$$y - x(y^m + a) = 0$$

oder

$$y^m - \frac{1}{x}y + a = 0 \tag{8}$$

in eine Reihe zu verwandeln. Hier ist nun wegen $Y = a + y^m$

$$D^{n-1}Y^n = D^{n-1}\{a^n + n_1 a^{n-1}y^m + n_2 a^{n-2}y^{2m} + n_3 a^{n-3}y^{3m} + \ldots\}$$

und da nach geschehener Differenziation $y=0$ zu setzen ist, so erhellt, dass m eine positive ganze Zahl sein muss, wenn nicht von irgend einer Stelle an (sobald nämlich $n-1 > m$ geworden ist) die Differenzialquotienten unendlich gross ausfallen sollen. Unter der gemachten Voraussetzung werden alle diejenigen Differenzialquotienten $=0$, bei denen nicht

$$n-1 = m\ ,\ 2m\ ,\ 3m\ ,\ 4m\ ,\ \text{etc.}$$

ist. Man erhält nun leicht für $n-1 = m$:

$$(D^{n-1}Y^n)_{(0)} = n_1 a^{n-1} 1.2.3\ldots m$$

d. i.

$$(D^m Y^{m+1})_{(0)} = (m+1)_1 a^m 1.2.3\ldots m;$$

ferner für $n-1 = 2m$:

$$(D^{n-1}Y^n)_{(0)} = n_2 a^{n-2} 1.2.3\ldots(2m)$$

oder

$$(D^{2m} Y^{2m+1})_{(0)} = (2m+1)_2 a^{2m-2} 1.2.3\ldots(2m);$$

dann wieder

$$(D^{3m} Y^{3m+1})_{(0)} = (3m+1)_3 a^{3m-2} 1.2.3\ldots(3m)$$

u. s. w.

und mithin nach Formel (1) für $n=1\ ,\ m+1\ ,\ 2m+1\ ,\ 3m+1$, etc. da für jeden anderen Werth von n die Coeffizienten verschwinden,

$$y' = \frac{ax}{1} + (m+1)_1 \frac{a^m x^{m+1}}{m+1} + (2m+1)_2 \frac{a^{2m-1} x^{2m+1}}{2m+1} + (3m+1)_3 \frac{a^{3m-2} x^{3m+1}}{3m+1} + \ldots,$$

wofür man auch schreiben kann:

$$y' = ax + \frac{1}{1} m_0 a^m x^{m+1} + \frac{1}{2}(2m)_1 a^{2m-1} x^{2m+1} + \frac{1}{3}(3m)_2 a^{3m-2} x^{3m+1} + \ldots. \quad (9)$$

Um die Gränzen für die Gültigkeit dieser Reihe zu bestimmen, hat man nach der ersten von den Gleichungen (2):

$$y^m + a = ymy^{m-1},$$

woraus sich

$$y = \left(\frac{a}{m-1}\right)^{\frac{1}{m}}$$

findet. Die zweite der genannten Gleichungen giebt jetzt:

$$x = \frac{1}{m\left(\frac{a}{m-1}\right)^{\frac{m-1}{m}}} = \frac{1}{m}\left(\frac{m-1}{a}\right)^{\frac{m-1}{m}},$$

und folglich muss in der Formel (9)

$$\operatorname{mod} x < \frac{1}{m}\left(\frac{m-1}{a}\right)^{\frac{m-1}{m}} \tag{10}$$

sein. — Nimmt man spezieller $x = \frac{1}{a}$, so hat man nach no. (9) für die kleinste Wurzel der Gleichung:

$$y^m - ay + a = 0 \tag{11}$$

die Formel:

$$y' = 1 + \frac{1}{1}\, m_0 \frac{1}{a} + \frac{1}{2}(2m)_1 \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3}(3m)_2 \frac{1}{a^3} + \cdots \tag{12}$$

und nach (10)

$$\frac{1}{a} < \frac{1}{m}\left(\frac{m-1}{a}\right)^{\frac{m-1}{m}}$$

oder

$$\frac{1}{a^m} < \frac{(m-1)^{m-1}}{m^m a^{m-1}},$$

folglich

$$\frac{1}{a} < \frac{(m-1)^{m-1}}{m^m}. \tag{13}$$

Setzt man endlich noch $m-1$ für m und $\frac{1}{a} = z$, so wird die kleinste Wurzel y' der Gleichung:

$$y^{m-1} - \frac{1}{z} y + \frac{1}{z} = 0 \tag{14}$$

durch die Reihe:

$$\left.\begin{aligned} y' &= 1 + \frac{1}{1}(m-1)_0 z + \frac{1}{2}(2m-2)_1 z^2 + \frac{1}{3}(3m-3)_2 z^3 + \,.. \\ z &< \frac{(m-2)^{m-2}}{(m-1)^{m-1}} \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

ausgedrückt. Es liesse sich übrigens bei diesem Beispiele eine Art von Probe machen, wenn man nämlich die Reihe in (15) rückwärts in die Gleichung (14) substituirte, wodurch man auf eine blose Identität kommen muss, weil y' eine Wurzel jener Gleichung, also eines von den y ist, welches derselben genügt. Bezeichnet man zur Abkürzung wie folgt:

$$\frac{1}{p}(pm-p)_{p-1} = A_p, \tag{16}$$

also

$$y' = 1 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \ldots \tag{17}$$

und schreibt die Gleichung (14) in der Form:

$$y^{m-1} = \frac{y-1}{z}$$

so ergiebt sich, wenn für y aus no. (17) y' gesetzt wird,

$$(1 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \ldots)^{m-1}$$
$$= A_1 + A_2 z + A_3 z^2 + A_4 z^3 + \ldots$$

Nimmt man die Logarithmen und differenzirt nachher, so wird:

$$(m-1)\,\frac{A_1 + 2A_2 z + 3A_3 z^2 + 4A_4 z^3 + \ldots}{1 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \ldots}$$
$$= \frac{A_2 + 2A_3 z + 3A_4 z^2 + 4A_5 z^3 + \ldots}{A_1 + A_2 z + A_3 z^2 + A_4 z^3 + \ldots}.$$

Multiplizirt man kreuzweis die Reihen und vergleicht hierauf die Coefficienten gleicher Potenzen von z, so findet man folgende Gleichungen:

$$A_1 = 1,$$
$$A_2 = \frac{2m-2}{2} A_1 A_1,$$
$$A_3 = \frac{3m-4}{4}(A_1 A_2 + A_2 A_1),$$
$$A_4 = \frac{4m-6}{6}(A_1 A_3 + A_2 A_2 + A_3 A_1),$$
$$A_5 = \frac{5m-8}{8}(A_1 A_4 + A_2 A_3 + A_3 A_2 + A_4 A_1),$$

u. s. f.,

oder allgemein:

$$A_p = \frac{pm-(2p-2)}{2p-2}(A_1 A_{p-1} + A_2 A_{p-2} + A_3 A_{p-3} + \ldots + A_{p-1} A_1) \tag{18}$$

und nun müssen natürlich die nach der Formel (16) berechneten Werthe von A_p, A_{p-1}, ... A_2, A_1 die vorliegende Gleichung erfüllen. Es ist aber die letztere eine Rekursions- und no. (16) eine independente Formel, und daher kann man auch umgekehrt sagen, wenn eine Reihe von Grössen A_1, A_2, ... A_p, die man noch nicht näher kennt, der Rekursionsformel (18) genügen soll, so muss die allgemeine Form derselben durch die independente Formel (16) bestimmt werden. Es ist übrigens nichts weniger als überflüssig, für dieselben Grössen dergleichen doppelte Relationen aufzustellen, weil es häufig vorkommt, dass man für eine Partie von Grössen sehr leicht eine Rekursionsformel finden kann, ohne eine independente Formel angeben zu können. Wollte man in solchen Fällen die letztere aus der ersteren durch successive Substitutionen ableiten, so würde man sich erst in einen ziemlich umständlichen Calcül einlassen, darauf aus den für A_1, A_2, A_3 etc. gefundenen independenten Ausdrücken die allgemeine Form von A_p errathen müssen und hätte sich endlich nach einem Beweise für dieselbe umzusehen, indem man zeigte, dass A_{p+1} unter derselben Form steht wie A_p, was oft wieder sehr umständlich ist. — So hat z. B. die oben behandelte Aufgabe eine geometrische Bedeutung. Stellt man nämlich die Frage, auf wieviel verschiedene Arten sich ein pEck durch Diagonalen im mEcke zerlegen lässt, und bezeichnet die Anzahl dieser Arten mit A_p, so kann man sich durch eine einfache geometrische Betrachtung*) überzeugen, dass zwischen A_p, A_{p-1}, A_{p-2}, etc. die Rekursionsformel (18) statt findet. Nach no. (16) folgt dann sogleich, dass sich ein pEck durch Diagonalen auf $\frac{1}{p}(pm-p)_{p-1}$ verschiedene Weisen in mEcke zerlegen lässt.

---

*) M. s. hierüber Grunerts Archiv der Mathematik. Theil I. S. 193. Setzt man für $(pm-p)_{p-1}$ seinen Werth, so wird:

$$A_p = \frac{(m-1)(pm-p-1)(pm-p-2)\ldots(pm-(2p-2))}{1.2.3\ \ldots.\ (p-1)}.$$

Diess stimmt mit der a. a. O. durch Induktion entwickelten aber nicht weiter bewiesenen Formel überein, wenn man statt p den dort gebrauchten Buchstaben t setzt. Das Obige enthält demnach den Beweis für die Richtigkeit jenes induktiven Resultates.

§. 55.

Entwickelung einer expliziten Funktion von einer impliziten Funktion.

Um die Allgemeinheit noch höher zu treiben, wollen wir jetzt die Aufgabe behandeln, nicht schlechtweg die kleinste Wurzel y' der Gleichung $y-xf(y)=0$, sondern eine gegebene explizite Funktion von ihr, etwa $F(y')$ in eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe zu verwandeln. Die Möglichkeit dieser Entwickelung und die Bedingungen ihrer Gültigkeit sind a priori leicht einzusehen. Wäre nämlich $F(y')$ eine stetige und endliche Funktion von y' und wären es auch alle Differenzialquotienten von ihr, wenigstens innerhalb eines Intervalles $y'=0$ bis $y'=\eta$, so würde man für eben dieses Intervall die Gleichung

$$F(y') = F(0) + \frac{y'}{1}F'(0) + \frac{y'^2}{1.2}F''(0) + \ldots.$$

aufstellen können. Da sich nun unter gewissen Bedingungen y' und ebenso y'^2, y'^3 in Reihen verwandeln lassen, die nach Potenzen von x fortgehen, so ist diess auch mit der ganzen rechten Seite der vorstehenden Gleichung und ebenso mit der linken der Fall. Zu den bereits bekannten Bedingungen für die Entwickelbarkeit von y' kommen also noch die hinzu, dass $F(y'), F'(y'), F''(y')$, etc. stetig und endlich bleiben müssen innerhalb eines gewissen bei $y'=0$ anfangenden Intervalles.

Wollte man nun die Aufgabe selbst dadurch zu lösen versuchen, dass mau in der obigen Gleichung für y', y'^2, y'^3, etc. ihre nach §. 54. angebbaren Werthe setzte, so würde man sich in eine höchst umständliche Transformation verwickeln; viel kürzer dagegen kommt man auf folgende Weise zum Ziele. Wir multipliziren die Gleichung (12) in §. 53. mit $\Phi(y)$, wo $\Phi(y)$ eine nebst ihren Differenzialquotienten endliche und stetige Funktion bedeutet und vergleichen in der so entstehenden neuen Relation die Coeffizienten von $\frac{1}{y}$, welche beiderseits vorkommen. Nun ist die linke Seite:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\Phi(y)}{y}\cdot\frac{y'}{1}+\frac{\Phi(y)}{y^2}\cdot\frac{y'^2}{2}+\frac{\Phi(y)}{y^3}\cdot\frac{y'^3}{3}+\ldots \\ -[b_0+b_1y+b_2y^2+\ldots.]\,\Phi(y),\end{array}\right\}\quad(1)$$

wobei sich wegen der der für $\Phi(y)$ angegebenen Bedingungen

$$\Phi(y) = \Phi(0) + \frac{y}{1}\Phi'(0) + \frac{y^2}{1.2}\Phi''(0) + \dots$$

setzen lässt. Der subtraktive Theil des in (1) stehenden Ausdruckes erhält bei dieser Substitution offenbar nur ganze positive Potenzen von y und wir brauchen daher keine Rücksicht auf ihn zu nehmen, weil es sich blos um den Coeffizienten von $\frac{1}{y}$ handelt. Der Minuendus in (1) wird jetzt

$$\begin{aligned}
&\frac{y'}{1.y}\{\Phi(0) + \frac{y}{1}\Phi'(0) + \frac{y^2}{1.2}\Phi''(0) + \dots \\
&+\frac{y'^2}{2.y^2}\{\Phi(0) + \frac{y}{1}\Phi'(0) + \frac{y^2}{1.2}\Phi''(0) + \dots\} \\
&+\frac{y'^3}{3.y^3}\{\Phi(0) + \frac{y}{1}\Phi'(0 + \frac{y^2}{1.2}\Phi''(0) + \dots\} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

und dabei ist der Coeffizient von $\frac{1}{y}$:

$$\frac{y'}{1}\Phi(0) + \frac{y'^2}{1.2}\Phi'(0) + \frac{y'^3}{1.2.3}\Phi''(0) + \frac{y'^4}{1.2.3.4}\Phi'''(0) + \dots \quad (2)$$

Die rechte Seite der Gleichung (12) in §. 53. wird ferner für $f(y) = Y$ und nach Multiplikation mit $\Phi(y)$

$$\frac{x}{1.y}Y\Phi(y) + \frac{x^2}{2.y^2}Y^2\Phi(y) + \frac{x^3}{3.y^3}Y^3\Phi(y) + \dots \quad (3)$$

und wenn wir auf jedes einzelne Glied das Mac Laurin'sche Theorem anwenden, was hier erlaubt ist, weil unter den gemachten Voraussetzungen $\Phi(y)$, Y, Y^2, Y^3, etc., folglich auch die Produkte $Y\Phi(y)$, $Y^2\Phi(y)$, $Y^3\Phi(y)$, etc. in Reihen von der Form $A + By + Cy^2 +$ etc. verwandelbar sind, so geht die Reihe (3) in die folgende über:

$$\begin{aligned}
&\frac{x}{1.y}\{[Y\Phi(y)]_0 + \frac{y}{1}\{D[Y\Phi(y)]\}_{(0)} + \frac{y^2}{1.2}\{D^2[Y\Phi(y)]\}_{(0)} + \dots\} \\
&+\frac{x^2}{2.y^2}\{[Y^2\Phi(y)]_{(0)} + \frac{y}{1}\{D[Y^2\Phi(y)]\}_{(0)} + \frac{y^2}{1.2}\{D^2[Y^2\Phi(y)]\}_{(0)} + \dots\} \\
&+\frac{x^3}{3.y^3}\{[Y^3\Phi(y)]_{(0)} + \frac{y}{1}\{D[Y^3\Phi(y)]\}_{(0)} + \frac{y^2}{1.2}\{D^2[Y^3\Phi(y)]\}_{(0)} + \dots\} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

und hier ist der Coeffizient von $\frac{1}{y}$:

$$\frac{x}{1}[Y\Phi(y)]_{(0)} + \frac{x^2}{1.2}\{D[Y^2\Phi(y)]\}_{(0)} + \frac{x^3}{1.2.3}\{D^2[Y^3\Phi(y)]\}_{(0)} + \dots$$

Durch Vergleichung dieses Coeffizienten von $\frac{1}{y}$ mit dem schon unter no. (2) gefundenen ist nun:

$$\frac{y'}{1}\Phi(0) + \frac{y'^2}{1.2}\Phi'(0) + \frac{y'^3}{1.2.3}\Phi''(0) + \dots$$

$$= \frac{x}{1}[Y\Phi(y)]_{(0)} + \frac{x^2}{1.2}\{D[Y^2\Phi(y)]\}_{(0)} + \frac{x^3}{1.2.3}\{D^2[Y^3\Phi(y)]\}_{(0)} + \dots$$

Setzt man noch $\Phi(y)=F'(y)$, also $\Phi'(y)=F''(y)$, $\Phi''(y)=F''(y)$, etc. so geht die linke Seite dieser Gleichung über in:

$$\frac{y'}{1}F'(0) + \frac{y'^2}{1.2}F''(0) + \frac{y'^3}{1.2.3}F'''(0) + \dots$$

und nach dem Mac Laurin'schen Satze ist $F(y')-F(0)$ ihre Summe, weil $F'(y)$, $F''(y)$, etc. den für $\Phi(y)$, $\Phi'(y)$, etc. gemachten Voraussetzungen nach innerhalb eines mit $y=0$ anfangendeen Intervalles stetig und endlich bleiben. Wir haben daher nach dem Obigen:

$$F(y')=F(0) + \frac{x}{1}[YF'(y)]_{(0)} + \frac{x^2}{1.2}\{D[Y^2F'(y)]\}_{(0)}$$
$$+ \frac{x^3}{1.2.3}\{D^2[Y^3F'(y)]\}_{(0)} + \dots \quad (4)$$

und hierin die Auflösung unserer Aufgabe. Die Gleichung selbst gilt so lange als $f(y)=Y$, $f'(y)=DY$, $f''(y)=D^2Y$, etc., ebenso $F(y)$, $F'(y)$, $F''(y)$, etc. innerhalb eines bei Null beginnenden Intervalles stetig und endlich bleiben, dass ferner $f(0)$ weder Null noch unendlich gross und der Modulus von x kleiner als der Modulus des kleinsten x ist, welches die simultanen Gleichungen $Y=yDY$ und $x=\frac{y}{Y}=\frac{1}{DY}$ erfüllt.

Die gefundene Formel lässt sich übrigens durch einen sehr einfachen Kunstgriff noch verallgemeinern. Man setze nämlich:

$$Y=f(y)=\varphi(y+a),\ F(y)=\Phi(y+a),$$

wo a eine willkührliche Constante ist; es wird dann

$$\Phi(y'+a) = \Phi(a) + \frac{x}{1}\,[\varphi(y+a)\,\Phi'(y+a)]_{(0)}$$
$$+ \frac{x^2}{1.2}\{D(\overline{\varphi(y+a)}^2\,\Phi'(y+a)\}_{(0)} + \ldots.$$

und hier bedeutet nun y' die kleinste Wurzel der Gleichung:

$$y - x\varphi(y+a) = 0.$$

Dabei wäre der Coeffizient von $\frac{x^n}{1.2\ldots n}$ in der obigen Reihe

$$\{D^{n-1}[\overline{\varphi(y+a)}^n\,\Phi'(y+a)]\}_{(0)}$$

d. i.

$$\frac{d^{n-1}[\overline{\varphi(y+a)}^n\,\Phi'(y+a)]}{dy^{n-1}} \text{ für } y = 0.$$

Setzt man aber zur Abkürzung $y+a=z$, also $dy=dz$, so wird für $y=0$, $z=a$, folglich der vorliegende Ausdruck gleich

$$\frac{d^{n-1}[\overline{\varphi(z)}^n\,\Phi'(z)]}{dz^{n-1}} \text{ für } z=a,$$

oder analog unserer vorigen Bezeichnung:

$$\{D^{n-1}[\varphi(z)\ \Phi'(z)]\}_{(a)};$$

und mithin ist nach dem Obigen:

$$\Phi(y'+a) = \Phi(a) + \frac{x}{1}[\varphi(z)\Phi'(z)]_{(a)} + \frac{x^2}{1.2}\{D[\overline{\varphi(z)}^2\Phi'(z)]\}_{(a)}$$
$$+ \frac{x^3}{1.2.3}\{D^2[\overline{\varphi(z)}^3\Phi'(z)]\}_{(a)} + \ldots.$$

Schreibt man kürzer $y-a$ für y, also auch, weil y' eine besondere Form von y ist, $y'-a$ für y', so geht die Gleichung (5) über in:

$$y - a - x\varphi(y) = 0 \quad \text{oder} \quad y = x\varphi(y) + a,$$

und die vorige Formel wird

$$\Phi(y') = \Phi(a) + \frac{x}{1}[\varphi(z)\Phi'(z)]_{(a)} + \frac{x^2}{1.2}\{D[\overline{\varphi(z)}^2\Phi'(z)]\}_{(a)} + \ldots.$$

Setzen wir endlich noch $a=z$, so können wir die angehangenen Marken weglassen, weil immer $z=z$ ist, und wenn wir noch f und F für φ und Φ schreiben, so wird, wenn y' die kleinste Wurzel der Gleichung:

$$y = xf(y) + z \tag{6}$$

bedeutet, und also eine Funktion zweier Variabelen x und z ist,

$$F(y') = F(z) + \frac{x}{1}[f(z)F'(z)] + \frac{x^2}{1.2}D[f(z)^2 F'(z)] + \frac{x^3}{1.2.3}D^2[f(z)^3 F'(z)] + \dots \quad (7)$$

wo sich die angedeuteten Differenziationen auf z als unabhängige Variabele beziehen und $f(z)^2$, $f(z)^3$, etc. der Bequemlichkeit wegen für $\overline{f(z)}^2$, $\overline{f(z)}^3$, etc. gesetzt sind. Die vorstehende sehr ellgemeine Gleichung heisst das Theorem oder auch **die Umkehrungsformel von Lagrange** und gilt nach den für die Gleichung (4) angegebenen Bedingungen nur so lange als $f(0)$ nicht $=0$ oder ∞, $f(y)$, $f'(y)$, $f''(y)$, etc.; ebenso $F(y)$, $F'(y)$, $F''(y)$, etc. stetig und endlich innerhalb eines bei Null anfangenden Intervalles bleiben und der Modulus von x kleiner als derjenige ist, welcher dem kleinsten, die simultanen Gleichungen

$$f(y) = (y-z)f'(y), \quad x = \frac{y-z}{f(y)} = \frac{1}{f'(y)} \quad (8)$$

erfüllenden x zugehört. — Nimmt man in der Formel (7) nach Ausführung der angedeuteten Operationen $z=0$, so kommt man auf die Formel (4) zurück.

§. 56.

Die Umkehrung der Reihen.

Um ein etwas allgemeineres Beispiel für die Formeln des vorigen Paragraphen zu haben, wollen wir eine Aufgabe behandeln, welche einige historische Berühmtheit hat, weil man sich zu Zeiten der combinatorischen Schule viel mit ihr beschäftigte.

Wenn zwischen x und y eine Gleichung von der Form

$$x = a_0 y + a_1 y^2 + a_2 y^3 + a_3 y^4 + \dots \quad (1)$$

besteht, worin die Reihe auf der rechten Seite als eine convergente vorausgesetzt wird*), so ist umgekehrt auch y und ebenso y^m eine

*) Convergenz ist desshalb nöthig, weil die Formel von Lagrange x als eine bestimmte endliche Grösse voraussetzt, was nicht der Fall sein würde, wenn die Reihe $a_0 y + a_1 y^2 +$ etc. divergirte.

gewisse Funktion von x, welche man auf folgende Weise in eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe verwandeln kann. Man setze zur Abkürzung:

$$\psi(y) = a_0 y + a_1 y^2 + a_2 y^3 + a_3 y^4 + \dots \qquad (2)$$

so ist

$$x = \psi(y) \text{ oder auch } y = x \frac{y}{\psi(y)}. \qquad (3)$$

Vergleichen wir diess mit der früher betrachteten Relation:

$$y - xf(y) = 0 \text{ oder } y = xf(y),$$

so ist

$$f(y) = Y = \frac{y}{\psi(y)} = \frac{1}{a_0 + a_1 y + \dots}, \qquad (4)$$

und diese Funktion erfüllt in der That die im vorigen Paragraphen ihr auferlegten Bedingungen. Ausserdem ist noch, da y^m gesucht wird,

$$F(y) = y^m, \; F'(y) = my^{m-1},$$

und folglich der Coeffizient von x^n in der Reihe (4) des vorigen Paragraphen:

$$\frac{m}{1.2.3\dots n} D^{n-1} \left[\left(\frac{y}{\psi(y)}\right)^n y^{m-1}\right] \text{ für } y=0. \qquad (5)$$

Nach (4) ist nun ferner:

$$\left(\frac{y}{\psi(y)}\right)^n = \frac{1}{(a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \dots)^n}$$

$$= (a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \dots)^{-n}.$$

Denkt man sich hierauf das Binomialtheorem angewendet, was man desswegen darf, weil wenigstens innerhalb eines kleinen Intervalles

$$\frac{a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + \dots}{a_0} < 1$$

ist, so kann man

$$\left(\frac{y}{\psi(y)}\right)^n = \overset{-n}{P_0} + \overset{-n}{P_1} y + \overset{-n}{P_2} y^2 + \overset{-n}{P_3} y^3 + \dots \qquad (6)$$

setzen, wo durch P gewisse Coeffizienten bezeichnet werden, die nur von n und den Constanten a_0, a_1, a_2, etc. abhängen. Man hat dann:

$$D^{n-1} \left[\left(\frac{y}{\psi(y)}\right)^n y^{m-1}\right]$$

$$= D^{n-1} \left\{ \overset{-n}{P_0} y^{m-1} + \overset{-n}{P_1} y^m + \overset{-n}{P_2} y^{m+1} + \overset{-n}{P_3} y^{m+2} + \dots \right\} \qquad (7)$$

und da nach geschehener Differenziation $y=0$ gesetzt wird, so muss m eine positive ganze Zahl sein, wenn nicht der Coeffizient in no. (5) unendlich werden soll. Unter dieser Voraussetzung giebt es in der vorstehenden Reihe ein Glied

$$\overset{-n}{P}_q y^{m+q-1},$$

worin der Exponent von y gleich $n-1$ ist; diess geschieht nämlich für $q=n-m$, so dass man die Gleichung (7) auch in folgender Form darstellen kann:

$$D^{n-1}\left[\left(\frac{y}{\psi(y)}\right)^n y^{m-1}\right]$$

$$= D^{n-1}\{\overset{-n}{P}_0 y^{m-1} + \ldots + \overset{-n}{P}_{n-m-1} y^{n-2} + \overset{-n}{P}_{n-m} y^{n-1} + \overset{-n}{P}_{n-m+1} y^n + \ldots\}$$

woraus sogleich folgt:

$$D^{n-1}\left[\left(\frac{y}{\psi(y)}\right)^n y^{m-1}\right] \text{ für } y=0$$

$$= 1.2.3\ldots(n-1)\overset{-n}{P}_{n-m}.$$

Nach no. (5) ist nun

$$\frac{m}{n}\overset{-n}{P}_{n-m} \text{ der Coeffizient von } x^n.$$

Wollte man hier $n=0$, 1, 2, etc. setzen, so würden mehrere der Grössen P negative Indices erhalten; dergleichen P müssen aber Null sein, weil in der Gleichung

$$(a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + \ldots)^{-n}$$
$$= \overset{-n}{P}_0 + \overset{-n}{P}_1 y + \overset{-n}{P}_2 y^2 + \overset{-n}{P}_3 y^3 + \ldots.$$

keine negativen Potenzen von y vorkommen können. Nehmen wir nun $n=m$, $m+1$, $m+2$, etc., so sind:

$$\frac{m}{m}\overset{-m}{P}_0, \frac{m}{m+1}\overset{-m-1}{P}_1, \frac{m}{m+2}\overset{-m-2}{P}_2, \ldots$$

die Coeffizienten von

$$x^m, x^{m+1}, x^{m+2},$$

und die Gleichung (4) des vorigen Paragraphen giebt jetzt wegen $F(y) = y^m$,

$$y'^m = \frac{m}{m}\overset{-m}{P}_0 x^m + \frac{m}{m+1}\overset{-m-1}{P}_1 x^{m+1} + \frac{m}{m+2}\overset{-m-2}{P}_2 x^{m+2} + \ldots, \quad (8)$$

wobei y' die kleinste Wurzel der Gleichung

$$x = a_0 y + a_1 y^2 + a_2 y^3 + a_3 y^4 + \ldots \quad (9)$$

bedeutet. Für $m=1$ hat man sehr einfach

$$y' = \frac{1}{1}\overset{-1}{P_0}\,x + \frac{1}{2}\overset{-2}{P_1}\,x^2 + \frac{1}{3}\overset{-3}{P_2}\,x^3 + \frac{1}{4}\overset{-4}{P_3}\,x^4 + \ldots \qquad (10)$$

Die Gränzen für die Gültigkeit der Formeln (8) und (10) sind leicht zu bestimmen, wenn man bemerkt, dass

$$f(y) = \frac{y}{\psi(y)}\ , \text{ also } f'(y) = \frac{1}{\psi(y)} - y\frac{\psi'(y)}{\psi(y)^2}$$

ist, und dass mithin die simultanen Gleichungen:

$$f(y) = yf'(y)\ ,\ x = \frac{y}{f(y)}$$

in die folgenden übergehen:

$$y\frac{\psi'(y)}{\psi(y)} = 0\ ,\ x = \psi(y). \qquad (11)$$

Zur Vollständigkeit der gegebenen Auflösung fehlt nun noch die Bestimmung der Grössen $\overset{-m}{P_0}, \overset{-m-1}{P_1}$, etc., die man leicht aus den folgenden

$$\overset{n}{P_0}\ ,\ \overset{n}{P_1}\ ,\ \overset{n}{P_2}\ ,\ \overset{n}{P_3}\ ,\ \ldots$$

ableiten könnte, wenn die letzteren bekannt wären. Für diese lassen sich nun ebensowohl independente als rekurrirende Formeln aufstellen. Das Erste kann mittelst des Mac Laurin'schen Satzes geschehen, wenn menn man berücksichtigt, dass für

$$\begin{aligned}\Phi(y) = \varphi(y)^n &= (a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \ldots)^n \\ &= \overset{n}{P_0} + \overset{n}{P_1}y + \overset{n}{P_2}y^2 + \overset{n}{P_3}y^3 + \ldots,\end{aligned}$$

auch gleichzeitig

$$\Phi(y) = \Phi(0) + \frac{y}{1}\Phi'(0) + \frac{y^2}{1.2}\Phi''(0) + \ldots$$

sein muss, woraus

$$\overset{n}{P_0} = \Phi(0)\ ,\ \overset{n}{P_1} = \frac{1}{1}\Phi'(0)\ ,\ \overset{n}{P_2} = \frac{1}{1.2}\Phi''(0)\ , \text{ etc.}$$

folgt. Man hat aber leicht folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}\Phi(y) &= \varphi(y)^n, \\ \Phi'(y) &= n\varphi(y)^{n-1}\varphi'(y), \\ \Phi''(y) &= n(n-1)\varphi(y)^{n-2}\varphi'(y)^2 + n\varphi(y)^{n-1}\varphi''(y), \\ \Phi'''(y) &= n(n-1)(n-2)(n-3)\varphi(y)^{n-3}\varphi'(y)^3 + 3n(n-1)\varphi(y)^{n-2}\varphi'(y)\varphi''(y) \\ &\quad + n\varphi(y)^{n-1}\varphi'''(y),\end{aligned}$$

u. s. f.

Für $y=0$ ergeben sich nun wegen

$$\varphi(y) = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \ldots$$

$\varphi(0) = a_0$, $\varphi'(0) = 1.a_1$, $\varphi''(0) = 1.2.a_2$, $\varphi'''(0) = 1.2.3.a_3$, etc.

leicht die Werthe von $\Phi(0)$, $\Phi'(0)$, $\Phi'''(0)$, etc. und hieraus

$$\left.\begin{aligned}
\overset{n}{P}_0 &= a_0{}^n, \\
\overset{n}{P}_1 &= n a_0{}^{n-1} a_1, \\
\overset{n}{P}_2 &= \frac{n(n-1)}{2} a_0{}^{n-2} a_1{}^2 + n a_0{}^{n-1} a_2, \\
\overset{n}{P}_3 &= \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3} a_0{}^{n-3} a_1{}^3 + n(n-1) a_0{}^{n-2} a_1 a_2 + n a_0{}^{n-1} a_3
\end{aligned}\right\} \quad 12)$$

u. s. f.

wo es indessen sehr schwer ist, das allgemeine Gesetz, wonach sich diese Ausdrücke bilden, zu errathen.

Brauchbarere Relationen für die gesuchten Grössen, welche man die **Polynomialkoeffizienten** nennt, giebt folgende Rechnung. Differenzirt man die Gleichung:

$$\left.\begin{aligned}
&(a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + \ldots.)^n \\
&= \overset{n}{P}_0 + \overset{n}{P}_1 y + \overset{n}{P}_2 y^2 + \overset{n}{P}_3 y^3 + \ldots.
\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

so ergiebt sich

$$\begin{aligned}
&n(a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \ldots)^{n-1}(a_1 + 2a_2 y + 3a_3 y^2 + \ldots) \\
&\qquad = \overset{n}{P}_1 + 2\overset{n}{P}_2 y + 3\overset{n}{P}_3 y^2 + \ldots
\end{aligned}$$

ferner durch Multiplikation mit $a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \ldots$, wenn man links die Gleichung (3) berücksichtigt,

$$\begin{aligned}
&n(\overset{n}{P}_0 + \overset{n}{P}_1 y + \overset{n}{P}_2 y^2 + \ldots)(a_1 + 2a_2 y + 3a_3 y^2 + \ldots) \\
&= (\overset{n}{P}_1 + 2\overset{n}{P}_2 y + 3\overset{n}{P}_3 y^2 + \ldots)(a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \ldots).
\end{aligned}$$

Führt man die hier angedeuteten Multiplikationen aus, ordnet hierauf Alles nach Potenzen von y und vergleicht dann die Coeffizienten gleicher Potenzen von y, so gelangt man zu folgenden Relationen:

$$a_0 \overset{n}{P}_1 = n a_1 \overset{n}{P}_0,$$

$$2a_0 \overset{n}{P}_2 + a_1 \overset{n}{P}_1 = n a_1 \overset{n}{P}_1 + 2n a_2 \overset{n}{P}_0,$$

$$3a_0 \overset{n}{P}_3 + 2a_1 \overset{n}{P}_2 + a_2 \overset{n}{P}_1 = n a_1 \overset{n}{P}_2 + 2n a_2 \overset{n}{P}_1 + 3n a_3 P_0,$$

u. s. w.,

woraus man auch leicht die folgenden ableiten kann:

$$\overset{n}{P}_1 = \frac{1}{1 . a_0} n a_1 \overset{n}{P}_0,$$

$$\overset{n}{P}_2 = \frac{1}{2 . a_0} \{(n-1) a_1 \overset{n}{P}_1 + 2n a_2 \overset{n}{P}_0\},$$

$$\overset{n}{P}_3 = \frac{1}{3 . a_0} \{(n-2) a_1 \overset{n}{P}_2 + (2n-1) a_2 \overset{n}{P}_1 + 3n a_3 \overset{n}{P}_0\},$$

u. s. f.

d. i. überhaupt für ein ganzes positives s:

$$\overset{n}{P}_s = \frac{1}{s . a_0} \{(n-s+1) a_1 \overset{n}{P}_{s-1} + (2n-s+2) a_2 \overset{n}{P}_{s-2} + (3n-s+3) a_3 \overset{n}{P}_{s-3} + \dots\} \quad (14)$$

und nach dieser Rekursionsformel ist die successive Berechnung der Polynomialkoeffizienten nicht schwer.

Die Formel (10), welche die Auflösung des sogenannten **Problemes der Reihenumkehrung** enthält, kann dazu dienen, um aus einer Reihe für irgend eine Funktion $\psi(y)$ eine Reihe für die umgekehrte Funktion abzuleiten. Eine Gleichung wie $x = \psi(y)$ lässt sich nämlich in vielen Fällen nach y auflösen, so dass mau $y = \varphi(x)$ findet und dann nennt man jede der Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(y)$ die Umkehrung der anderen. Hat man daher für die eine derselben, etwa $\psi(y)$, eine Reihe

$$\psi(y) = a_0 y + a_1 y^2 + a_2 y^3 + \dots .$$

gefunden, so giebt die Formel (10) die Reihenentwickelung der umgekehrten Funktion, nämlich:

$$\varphi(x) = \frac{1}{1} \overset{-1}{P}_0 \, x + \frac{1}{2} \overset{-2}{P}_1 \, x^2 + \frac{1}{3} \overset{-3}{P}_2 \, x^3 + \dots, \quad (16)$$

vorausgesetzt nämlich, dass $\varphi(x)$ diejenige Umkehrung von $\psi(y)$ ist, die mit x gleichzeitig verschwindet. Nimmt man z. B. in no. (15) $\psi(y) = \mathrm{Arctan}\, y$, also $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = -\frac{1}{3}$, $a_3 = 0$, $a_4 = +\frac{1}{5}$, etc., so folgt aus $x = \mathrm{Arctan}\, y$ umgekehrt $y = \tan x$ und folglich ist nach (16):

$$\tan x = \frac{1}{1} \overset{-1}{P}_0 \, x + \frac{1}{2} \overset{-2}{P}_1 x^2 + \frac{1}{3} \overset{-3}{P}_2 x^3 + \dots .$$

und nach no. (14)

$$\overset{n}{P}_s = -\frac{1}{s}\left\{\frac{2n-s+2}{3}\overset{n}{P}_{s-2} - \frac{4n-s+4}{5}\overset{n}{P}_{s-} + \frac{6n-s+6}{7}\overset{n}{P}_{s-6} - \dots\right\}$$

woraus man

$$\overset{-2}{P}_1 = 0\ ,\ \overset{-4}{P}_3 = 0\ ,\ \overset{-6}{P}_5 = 0\ ,\ \text{etc.}$$

findet, so dass blos übrig bleibt:

$$\tan x = \frac{1}{1}\overset{-1}{P}_0 x + \frac{1}{3}\overset{-}{P}_2 x^3 + \frac{1}{5}\overset{-5}{P}_4 x^5 + \dots \qquad (17)$$

Die Gleichungen (11) werden jetzt

$$\frac{y}{(1+y^2)\operatorname{Arctan} y} = 0\ ,\ x = \operatorname{Arctan} y.$$

Die einzige Auflösung, welche die erste hat, ist $y=\infty$, woraus $x = \frac{\pi}{2}$ folgt. Die Gleichung (17) gilt demnach nur so lange als der Modulus von x weniger als $\frac{\pi}{2}$ beträgt, was wir schon auf auf anderem Wege gefunden haben.

So elegant übrigens auch die Methode, neue Reihen durch Umkehrung schon bekannter zu entwickeln, scheinen mag, so wenig praktischen Werth hat sie; denn da das independente Gesetz der Polynomialkoeffizienten sehr verwickelt ist, so kann man auch in der umgekehrten Reihe (16) die allgemeine Form der Coeffizienten von x , x^2, x^3 etc. nicht independent angeben, was aber gerade ein Haupterforderniss jeder guten Reihenentwickelung ist.

Cap. X. Anwendungen auf Geometrie.

§ 57.

Tangenten und Normalen ebener Curven.

Schon früher einmal in § 12. haben wir die geometrische Bedeutung des Differenzialquotienten einer Funktion $f(x)$ für den Fall erkannt, dass $f(x)$ das Bildungsgesetz der Ordinaten einer ebenen Curve, also

$$y = f(x)$$

die Gleichung der letzteren auf rechtwinkliche Coordinaten bezogen darstellt. An fig. 7. nämlich sahen wir, dass wenn τ der Winkel $UPT = BST$ heisst, welchen die Tangente ST im Punkte P, dessen Coordinaten $OA = x$, $AP = y$ sind, mit der Abscissenachse macht, die Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \tan\tau \qquad (1)$$

statt findet. Dort diente dieses Resultat zur Veranschaulichung der Operation des Differenzirens, hier soll es uns auf dem Gebiete der Geometrie weiter führen.

Nennen wir in fig. 7. $OX = \xi$ und $XY = \eta$ die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Tangente ST, so ist

$$\eta - y = (\xi - x)\tan\tau,$$

wie sich sehr leicht ergiebt, wenn die Differenzen $\eta - y$ und $\xi - x$ mittelst zweier Hülfslinien construirt werden; vermöge des vorhin bestimmten Werthes von $\tan\tau$ haben wir nun auch:

$$\eta - y = \frac{dy}{dx}(\xi - x) = f'(x)(\xi - x)$$

und diese Relation, welche zu jedem ξ das zugehörige η finden lehrt, ist nach der Sprache der analytischen Geometrie die Gleichung der Tangente am Punkte (x, y).

Errichtet man im Punkte P eine Senkrechte PN auf die Tangente, so heisst PN die Normale der Curve im Punkte (x, y); nennt man ferner ξ , η die rechtwinklichen Coordinaten irgend eines Punktes derselben, so überzeugt man sich leicht von der Richtigkeit der Gleichung:

$$\xi - x = (y - \eta)\tan\tau$$

oder

$$\eta - y = -(\xi - x)\frac{1}{\tan\tau},$$

und hieraus ergiebt sich:

$$\eta - y = -\frac{dx}{dy}(\xi - x) = -\frac{1}{f'(x)}(\xi - x) \qquad (3)$$

als Gleichung der Normale im Punkte (x, y).

Will man diejenigen Stücke der Tangente und Normale haben, welche zwischen die Abscissenachse und den Punkt (x, y) fallen, also

die Strecken PS und PN, welche man auch die Längen der Tangente und Normale nennt, so braucht man blos zu berücksichtigen, dass der Figur nach

$$PS = \frac{y}{\sin\tau}\,,\ PN = \frac{y}{\cos\tau}\,,$$

andererseits aber

$$\sin\tau = \frac{\tan\tau}{\sqrt{1+\tan^2\tau}}\,,\ \cos\tau = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\tau}}$$

ist. Substituirt man daher für $\tan\tau$ seinen Werth, so wird:

$$\text{Tang.} = y\,\frac{dx}{dy}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{f(x)}{f'(x)}\sqrt{1+f'(x)^2} \qquad (4)$$

$$\text{Norm.} = y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}. \qquad (5)$$

Auch die Strecken AS und AN der Abscissenachse, welchen man die Namen Subtangente und Subnormale gegeben hat, lassen sich leicht angeben, wenn man berücksichtigt, dass sie diejenigen Werthe der Differenzen $\xi - x$ in den Gleichungen der Tangente und Normale sind, welche der Ordinate $\eta = 0$ entsprechen. Nimmt man nämlich in der Gleichung (2) $\eta = 0$, so reduzirt sich ξ auf OS und folglich ist, abgesehen vom Vorzeichen, $AS = OS - OA = \xi - x$; in der Gleichung (3) wird ferner für $\eta = 0$, $\xi = ON$, mithin $AN = ON - OA = \xi - x$, folglich:

$$\text{Subt.} = y\,\frac{dx}{dy} = \frac{f(x)}{f'(x)} \qquad (7)$$

$$\text{Subn.} = y\,\frac{dy}{dx} = f(x)\,f'(x)$$

Es folgt hieraus, dass die Ordinate $y = f(x)$ die mittlere Proportionale zwischen der Subtangente und Subnormale ist, was man auch unmittelbar aus der Betrachtung des bei P rechtwinklichen Dreiecks SPN einsieht.

Die Formeln (4), (5), (6) und (7) dienen hauptsächlich zur Auffindung geometrischer Construktionen, mittelst deren man an einen gegebenen Punkt (x, y) einer Curve eine Tangente legen kann; kennt man nämlich nur eine der Grössen Tang., Norm., Subt., Subn., so ist es sehr leicht die Tangente oder Normale zu ziehen, und wenn sich also nur eine der gefundenen Formeln geometrisch construiren lässt, so hat

man hierin eine rein geometrische Lösung des genannten Problemes. Diess mögen einige Beispiele zeigen.

I. Nimmt man die Achse einer Parabel zur Ordinatenachse und eine durch ihren Scheitel senkrecht auf die Achse gezogene Gerade zur Abscissenachse, so ist die Gleichung der Curve

$$x = \sqrt{py} \text{ oder } y = \frac{x^2}{p},$$

worin p den Parameter der Parabel bezeichnet. Es folgt hieraus:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{p}, \quad \frac{dx}{dy} = \frac{p}{2x}$$

und nach den früheren Formeln

$$\text{Tang.} = \frac{x}{2p}\sqrt{p^2 + (2x)^2}, \quad \text{Norm.} = \frac{y}{p}\sqrt{p^2 + (2x)^2}$$

$$\text{Subt.} = \frac{x}{2}, \quad \text{Subn.} = \frac{2x^3}{p^2}$$

und da sich alle diese Ausdrücke geometrisch construiren lassen, so giebt diess vier verschiedene Regeln zum Tangentenziehen, von denen diejenige die einfachste ist, bei welcher man von der Subtangentenformel ausgeht.

II. Um auch einen Fall zu betrachten, in welchem die Gleichung der Curve nicht nach y auflösbar ist, also y nicht als entwickelte Funktion von x angegeben werden kann, sei

$$x^3 - 3axy + y^3 = 0$$

die Gleichung der gegebenen Curve, welche man wegen der Schleife, die sie bildet, das Blatt des Cartesius genannt hat (fig. 18). Um hier zunächst den Differenzialquotienten $\frac{dy}{dx}$ zu finden, wenden wir die Regel an, dass wenn zwischen x und y eine Gleichung von der Form

$$F(x, y) = 0$$

besteht, der Differenzialquotient von y durch die Formel:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dF(x,y)}{dx}}{\frac{dF(x,y)}{dy}}$$

bestimmt wird, worin Zähler und Nenner auf der rechten Seite partielle Differenzialquotienten bedeuten. Diess giebt in unserem Falle:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2-3ay}{3y^2-3ax}=\frac{x^2-ay}{y^2-ax}.$$

Hieraus folgt u. A.

$$\text{Subt.} = y\,\frac{x^2-ay}{y^2-ax}=y\,\frac{\frac{x^2}{a}-y}{\frac{y^2}{a}-x},$$

und diess lässt sich leicht geometrisch construiren, wenn man berücksichtigt, dass $\frac{x^2}{a}$ die vierte Proportionale in $a:x=x:\frac{x^2}{a}$, folglich $\frac{x^2}{a}-y$, ebenso $\frac{y^2}{a}-x$ eine bestimmte Gerade und der ganze Ausdruck für Subt. die vierte Proportionale zu $\frac{y^2}{a}-x, y$ und $\frac{x^2}{a}-y$ ist.

III. Die Gleichung der Cykloide besteht bekanntlich darin, dass die Coordinaten u und v vom Anfange der Bewegung an gerechnet die simultanen Gleichungen *):

$$u=r(\vartheta-\sin\vartheta)\ ,\ v=r(1-\cos\vartheta)$$

*) Die Cykloide ist bekanntlich der Weg, den irgend ein Punkt eines Kreises beschreibt, der sich auf einer Geraden fortwälzt, ohne zu gleiten. Sei in fig. 19. O der Mittelpunkt dieses Kreises $OP=r$, AB die gegebene Gerade und A die Stelle, von welcher aus die Bewegung anfing. Der Punkt des Kreises, dessen Bahn wir betrachten, möge P sein, wobei wir voraussetzen, dass im Anfange P mit A zusammenfiel. Setzen wir noch $AM=u$, $MP=v$, $\angle NOP=\vartheta$, so ist klar, dass die Strecke $AN=$ dem Bogen NP ist, weil sich der Kreis auf der Geraden AB abwickelt. Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} u &= AN-MN = AN-PQ \\ &= r\vartheta-r\sin\vartheta = r(\vartheta-\sin\vartheta); \\ v &= ON-OQ = r-r\cos\vartheta \\ &= r(1-\cos\vartheta) \end{aligned}$$

und diess sind die oben erwähnten Gleichungen. Für $\vartheta=\pi$, also wenn der Kreis eine halbe Umdrehung gemacht hat, wird $u=AD=r\pi$, $v=CD=2r$ und für $\vartheta=2\pi$, also nach einer ganzen Umdrehung $u=2r\pi$, $v=0$. Die Basis der Cykloide ist also dem Umfange des erzeugenden Kreises und ihre Höhe dem Durchmesser desselben gleich.

erfüllen, worin r den Halbmesser des erzeugenden Kreises und ϑ den Wälzungswinkel bezeichnet. Rechnen wir aber die Coordinaten vom Scheitel der Cykloide aus, und die Höhe der Cykloide zur Achse der x, so ist:

$$x = 2r - v\ ,\ y = r\pi - u,$$

oder nach dem Vorigen:

$$x = r(1 + \cos\vartheta)\ ,\ y = r(\pi - \vartheta + \sin\vartheta).$$

Um hieraus $\frac{dy}{dx}$ abzuleiten, differenziren wir beide Gleichungen nach ϑ, woraus sich

$$\frac{dx}{d\vartheta} = -r\sin\vartheta\ ,\ \frac{dy}{d\vartheta} = -r(1 - \cos\vartheta)$$

und durch Division

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-\cos\vartheta}{\sin\vartheta} = \tan\tfrac{1}{2}\vartheta = \sqrt{\frac{1-\cos\vartheta}{1+\cos\vartheta}}$$

ergiebt. Andererseits ist aber unmittelbar

$$1 + \cos\vartheta = \frac{x}{r}\ ,\ \text{folglich}\ 1 - \cos\vartheta = \frac{2r - x}{r}$$

und durch Substitution dieser Werthe erhalten wir jetzt:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2r-x}{x}}.$$

Mit Hülfe der Formeln (4), (5), (6) und (7) findet man nun:

$$\text{Tang.} = y\sqrt{\frac{2r}{2r-x}}\ ,\ \text{Norm.} = \frac{y}{x}\sqrt{2r(2r-x)},$$

$$\text{Subt.} = y\sqrt{\frac{x}{2r-x}}\ ,\ \text{Subn.} = y\sqrt{\frac{2r-x}{x}}$$

und es würde sehr leicht sein, diese Ausdrücke geometrisch zu construiren.

§. 58.

Die Asymptoten ebener Curven.

Wenn sich eine Curve oder wenigstens einer ihrer Zweige ins Unendliche erstreckt und man successiv an alle Punkte derselben Tangenten legt oder, was auf das Nämliche hinauskommt, wenn man den Punkt, an welchem eine Tangente gezogen ist, auf der Curve ins Unendliche hinausgehen lässt, so sind hinsichtlich der verschiedenen Richtungen, welche diese Tangente nach einander annimmt, zwei Fälle denkbar; nämlich entweder nähern sich dieselben mehr und mehr einer bestimmten Richtung als Gränze oder nicht, denn da τ immer eine gewisse Funktion von x ist, etwa $\tau = \varphi(x)$, so muss für unendlich wachsende x sich $\mathrm{Lim}\, \varphi(x)$ entweder angeben lassen (überhaupt existiren), oder nicht. Ausserdem sind hinsichtlich der Lage jener successiven Tangenten noch zwei Fälle möglich; ihr Durchschnitt mit der Abscissenachse wird nämlich immer fortrücken, entweder bis zu einer bestimmten Stelle oder nicht. Finden nun die jedesmaligen ersten Fälle in diesen beiden Distinktionen gleichzeitig statt, so existirt eine gewisse Gerade, welcher sich die successiven Tangenten der Curve unbegränzt nähern, eine solche Gerade heisst eine **Asymptote** der Curve, weil man auch sagen kann, dass die Curve selbst sich dieser Geraden unausgesetzt nähert und ihr so nahe kommen kann als es nur verlangt wird, ohne aber jemals dieselbe zu erreichen.

Aus diesen Bemerkungen ergiebt sich nun sogleich ein sehr einfaches Mittel zur Entscheidung der Frage, ob eine gegebene Curve Asymptoten habe oder nicht. Erstlich nämlich muss man untersuchen, ob der Winkel τ also auch $\tan\tau$ sich einer bestimmten Gränze nähert oder nicht; heisst τ_1 dieselbe, so ist

$$\tan\tau_1 = \mathrm{Lim}\,\frac{dy}{dx}. \tag{1}$$

Ferner muss die Grösse OS in fig. 20. einer angebbaren Gränze zueilen; da aber OS diejenige Abscisse ξ eines Punktes der Tangente ist, für welchen $\eta = 0$ wird, so hat man nach Formel (2) im vorigen Paragraphen

$$\xi = x - y\,\frac{dx}{dy},$$

und wenn ξ_1 der Gränzwerth von ξ für unendlich .wachsende x heisst,

$$\xi_1 = \text{Lim}\,(x - y\,\frac{dx}{dy}). \tag{2}$$

Haben nun in (1) und (2) τ_1 und ξ_1 angebbare Werthe, so kann man auch leicht die Gleichung der Asymptote aufstellen; denn wenn x', y' die Coordinaten irgend eines Punktes dieser Geraden sind, so findet offenbar die Relation:

$$y' = (x' - \xi_1)\tan\tau_1 \tag{3}$$

statt und diese ist nichts Anderes als die Gleichung der Asymptote selbst.

Um hiernach zu untersuchen, ob z. B. die Parabel Asymptoten habe oder nicht, nehmen wir

$$y = \sqrt{px}\ ,\ \text{also}\ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{x}},$$

woraus

$$\tau_1 = \text{Lim}\,\frac{\frac{1}{2}\sqrt{p}}{\sqrt{x}} = 0$$

folgt. Die Richtungen der Tangenten nähern sich also immer mehr dem Parallelismus zur Parabelachse. Ferner ist

$$\xi = x - \sqrt{px}\ 2\sqrt{\frac{x}{p}} = -x,$$

folglich $\text{Lim}\,\xi = -\infty$ d. h. die Durchschnitte der Tangenten mit der Parabelachse rücken ins Unendliche hinaus; es giebt demnach keine Asymptote.

Für die Hyperbel haben wir, wenn a die grosse und b die kleine Achse bezeichnet,

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\ ,\ \frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}\,\frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{b}{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}},$$

mithin durch Uebergang zur Gränze für unausgesetzt wachsende x

$$\tan\tau_1 = \frac{b}{a}.$$

Ferner wird

$$\xi = x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\cdot\frac{a}{b}\,\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} = x - \frac{x^2 - a^2}{x} = \frac{a^2}{x},$$

folglich

$$\xi_1 = \text{Lim}\frac{a^2}{x} = 0,$$

Demnach haben wir nach no. (3) als Gleichung der Asymptote:

$$y' = \frac{b}{a}\,x'$$

und dieselbe geht durch den Anfangspunkt der Coordinaten. Ist die Hyperbel gleichseitig d. h. $b = a$, so wird $\tan\tau_1 = 1$, folglich der sogenannte Asymptotenwinkel $\tau_1 = 45^0$.

Man kann übrigens leicht noch eine zweite Regel zur Aufsuchung der Asymptoten geben, die in manchen Fällen von bequemerer Anwendung sein wird. Sie gründet sich auf die einfache Bemerkung, dass wenn eine der Ordinatenachse nicht parallele Asymptote vorhanden ist, die Ordinaten der Curve um so weniger von den zu den nämlichen Abscissen gehörigen Ordinaten der Asymptote differiren, je grösser die Abscissen selbst genommen werden. Ist z. B. in fig. 20. $OA = x$, $AP = y$, $AP' = y'$ und

$$y' = \alpha x + \beta \tag{4}$$

die Gleichung der Asymptote, so hat man offenbar für $PP' = \varepsilon$

$$y = \alpha x + \beta + \varepsilon,$$

wo nun ε eine Grösse ist, die bis zur Gränze Null abnimmt, wenn x wächst. Aus dieser Gleichung folgt nun:

$$\frac{y}{x} = \alpha + \frac{\beta + \varepsilon}{x},$$

und folglich, wenn man zur Gränze für unendlich zunehmende x übergeht,

$$\alpha = \text{Lim}\frac{y}{x} \tag{5}$$ *)

---

*) Diess Resultat ist nur formell von dem unter no. (1) stehenden verschieden. Heisst nämlich τ_1 der Winkel, welche irgend eine durch die Gleichung $y' = \alpha x + \beta$ bestimmte Gerade mit der Abscissenachse macht, so ist nach bekannten Lehren der analytischen Geometrie $\alpha = \tan\tau_1$ und folglich geht die obige Gleichung in $\tan\tau_1 = \text{Lim}\frac{y}{x}$ über. Wenn nun überhaupt eine Asymptote existirt, so wird sich dieser Gränzwerth unter die vieldeutige Form $\frac{\infty}{\infty}$ stellen und man findet dann $\text{Lim}\frac{y}{x} = \text{Lim}\frac{dy}{dx}$, wodurch die Formel (5) mit (1) zusammenfällt. Dadurch wird aber no. (5) noch nicht überflüssig, weil man sehr oft die Division mit x ausführen kann.

Hat man auf diese Weise α bestimmt, so ergiebt sich aus der Glei chung $y = \alpha x + \beta + \varepsilon$,

$$\beta = \mathrm{Lim}(y - \alpha x),$$

wodurch nun die beiden Constanten α und β, welche die Lage der Asymptote angeben, bestimmt sind. Diese Regel lässt sich auch auf implizite Funktionen anwenden, wenn man also blos die Gleichung kennt, aus der y noch zu entwickeln wäre. Kann man nämlich die letztere auf folgende Form bringen:

$$F(x,y) = x^m \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x^n \psi\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots = 0,$$

wobei die Zahlen m, n, etc. der Grösse nach absteigend geordnet sind, so ist auch:

$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x^{m-n}} \psi\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots = 0.$$

Weiss man nun im Voraus, dsss $\mathrm{Lim}\ \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, $\mathrm{Lim}\ \psi\left(\frac{y}{x}\right)$, ... nicht unendlich gross werden, so hat man für unendlich wachsende x, wegen $\mathrm{Lim}\ \frac{y}{x} = \alpha$

$$\varphi(\alpha) = 0, \tag{7}$$

woraus man α zu bestimmen hat. Um β zu finden, setzen wir in der vorhergehenden Gleichung

$$y = \alpha x + t, \tag{8}$$

so wird dieselbe:

$$\varphi\left(\alpha + \frac{t}{x}\right) + \frac{1}{x^{m-n}} \psi\left(\alpha + \frac{t}{x}\right) + \ldots = 0.$$

Man hat aber ferner $\varphi(\alpha + h) = \varphi(\alpha) + h\varphi'(\alpha + \lambda h)$, mithin, weil $\varphi(\alpha) = 0$ für $h = \frac{t}{x}$:

$$\varphi\left(\alpha + \frac{t}{x}\right) = \frac{t}{x}\varphi'\left(\alpha + \frac{\lambda t}{x}\right)$$

und hierdurch geht die obige Gleichung über in:

$$t\varphi'\left(\alpha + \frac{\lambda t}{x}\right) + \frac{1}{x^{m-n-1}} \psi\left(\alpha + \frac{t}{x}\right) + \ldots = 0.$$

Ist nun eine Asymptote vorhanden, so ist $\beta = \mathrm{Lim}(y - \alpha x)$, folglich geht dann nach no. (8) t in β über, und die vorige Gleichung giebt:

$$\beta\varphi'(\alpha) + \text{Lim}\,\frac{\psi(\alpha)}{x^{m-n-1}} = 0,$$

d. i.

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \text{für}\ n < m-1\ ,\ \beta = 0 \\ 2)\ \ ,,\ \ n = m-1\ ,\ \beta = -\dfrac{\psi(\alpha)}{\varphi'(\alpha)} \\ 3)\ \ ,,\ \ n > m-1\ ,\ \beta = \pm\infty. \end{array}\right\} \qquad (9)$$

Im ersten Falle geht die Asymptote durch den Anfangspunkt der Coor dinaten und ist ganz einfach

$$y' = \alpha x$$

ihre Gleichung; im zweiten Falle wird letztere

$$y' = \alpha x - \frac{\psi(\alpha)}{\varphi'(\alpha)} \qquad (10)$$

und im dritten Falle existirt gar keine Asymptote, weil der Durchschnitt der Tangente mit der Abscissenachse ins Unendliche wegrückt.

Um diess auf ein Beispiel anzuwenden, sei die gegebene Curve das Cartesianische Blatt, oder

$$F(x,y) = x^3 - 3axy + y^3 = 0.$$

Stellt man sie in der Form

$$\left(\frac{y}{x}\right)^3 - \frac{3a}{x}\left(\frac{y}{x}\right) + 1 = 0 \qquad (11)$$

dar, so übersieht man auf der Stelle, dass hier $\text{Lim}\,\frac{y}{x}$ nicht unendlich sein kann; denn man hat auch

$$\frac{y}{x}\left[\left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{3a}{x}\right] + 1 = 0$$

und hier ist auf der Stelle klar, dass wenn $\frac{y}{x}$ unendlich würde, die ganze linke Seite unendlich würde und also nicht mehr $=0$ sein könnte. Wir haben daher nach no. (11)

$$\alpha^3 + 1 = 0\ ,\ \alpha = -1;$$

ausserdem ist hier

$$\varphi(\alpha) = \alpha^3\ ,\ \psi(a) = -3a\alpha$$

folglich

$$\frac{\psi(\alpha)}{\varphi'(\alpha)} = \frac{-3a\alpha}{3\alpha^2} = -\frac{a}{\alpha} = a$$

wegen $\alpha = -1$. Mithin ist

$$y' = -x - a$$

die Gleichung der Asymptote des Cartesianischen Blattes. In fig. 18 ist dieselbe mitgezeichnet und dabei $\angle X'BT = 45^0$ und $OB = a$.

Aehnliche Schlüsse sind auf alle algebraischen Curven anwendbar.

§. 59.

Die Tangenten und Normalebenen der Curven von doppelter Krümmung.

Jede doppelt gekrümmte Curve hat bekanntlich zwei Gleichungen, weil man sie als den Durchschnitt zweier Flächen betrachten kann. Bezeichnen nämlich

$$\Phi(x,y,z) = 0\ ,\ \Psi(x,y,z) = 0 \qquad (1)$$

die Gleichungen der sich schneidenden Flächen, so gehören diejenigen Coordinaten x , y , z, welche beide Gleichungen simultan erfüllen, dem Durchschnitte beider Flächen, also der Curve doppelter Krümmung an. Eliminirt man aus denselben einmal y und einmal x, so erhält man zwei Gleichungen von der Form:

$$x = \varphi(z)\ ,\ y = \psi(z) \qquad (2)$$

und diess sind die Gleichungen der fraglichen Curve. Giebt man nun dem z ein beliebiges Inkrement Δz, so ändern sich auch x und y etwa um Δx und Δy; um aber anzudeuten, dass diese Aenderungen von Δz herrühren, wollen wir statt derselben $\left(\frac{\Delta x}{\Delta z}\right) \Delta z$ und $\left(\frac{\Delta y}{\Delta z}\right) \Delta z$ schreiben. Sind jetzt in fig. 21. P und Q die beiden Punkte der Curve, welche

$$x\ ,\ y\ ,\ z$$

und

$$x + \left(\frac{\Delta x}{\Delta z}\right) \Delta z\ ,\ y + \left(\frac{\Delta y}{\Delta z}\right) \Delta z\ ,\ z + \Delta z$$

zu Coordinaten haben, so lässt sich die Grösse und Richtung der Sehne PQ sehr leicht angeben; die erstere, die etwa ϱ heissen möge, durch die einfache Bemerkung, dass ϱ die Diagonale von einem rechtwinklichen Parallelepipedon ist, welches Δx , Δy , Δz zu Seiten hat. Hieraus folgt:

$$\varrho = \varDelta z \sqrt{\left(\frac{\varDelta x}{\varDelta z}\right)^2 + \left(\frac{\varDelta y}{\varDelta z}\right)^2 + 1.}$$

Nennen wir ferner λ, μ, ν die Winkel, welche PQ mit drei durch P den Coordinatenachsen parallel gelegten Geraden macht, so ist:

$$\cos\lambda = \frac{\varDelta x}{\varrho}, \ \cos\mu = \frac{\varDelta y}{\varrho}, \ \cos\nu = \frac{\varDelta z}{\varrho}$$

oder

$$\cos\lambda = \frac{\frac{\varDelta x}{\varDelta z}}{\sqrt{\left(\frac{\varDelta x}{\varDelta z}\right)^2 + \left(\frac{\varDelta y}{\varDelta z}\right)^2 + 1}},$$

$$\cos\mu = \frac{\frac{\varDelta y}{\varDelta z}}{\sqrt{\left(\frac{\varDelta x}{\varDelta z}\right)^2 + \left(\frac{\varDelta y}{\varDelta z}\right)^2 + 1}},$$

$$\cos\nu = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\varDelta x}{\varDelta z}\right)^2 + \left(\frac{\varDelta y}{\varDelta z}\right)^2 + 1}}.$$

Lassen wir nun den Punkt Q immer näher an P rücken, so ist die Tangente SPT der Gränzfall der Sekante und die Winkel, welche ST mit jenen drei durch P gelegten Geraden (sekundären Coordinatenachsen) macht, sind die Gränzwerthe der Winkel λ, μ, ν. Nennen wir α, β, γ die Winkel, welche die Tangente in P mit den Coordinatenachsen oder den ihnen parallelen Geraden macht, lassen nun das unabhängige Inkrement $\varDelta z$ bis zur Gränze Null abnehmen, und bemerken, dass

$$\text{Lim}\,\frac{\varDelta x}{\varDelta z} = \frac{dx}{dz}, \ \text{Lim}\,\frac{\varDelta y}{\varDelta z} = \frac{dy}{dz}$$

ist, so erhalten wir zur Bestimmung der Richtung der Tangente die Formeln:

$$\left.\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{\frac{dx}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 + 1}} \\
\cos\beta &= \frac{\frac{dy}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 + 1}} \\
\cos\gamma &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 + 1}}
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

wofür man vermöge der Gleichungen (2) auch schreiben kann:

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{\varphi'(z)}{\sqrt{\varphi'(z)^2+\psi'(z)^2+1}}\\ \cos\beta &= \frac{\psi'(z)}{\sqrt{\varphi'(z)^2+\psi'(z)^2+1}}\\ \cos\gamma &= \frac{1}{\sqrt{\varphi'(z)^2+\psi'(z)^2+1}}\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Es hat nun auch keine Schwierigkeit, die Gleichungen der Tangente anzugeben. Nennen wir nämlich ξ, η, ζ die Coordinaten irgend eines Punktes derselben und r seine Entfernung vom Punkte (x, y, z), so ist

$$\xi - x = r\cos\alpha\,,\ \eta - y = r\cos\beta\,,\ \zeta - z = r\cos\gamma;$$

folglich

$$\frac{\xi - x}{\zeta - z} = \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\,,\ \frac{\eta - y}{\zeta - z} = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$$

oder

$$\xi - x = \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}(\zeta - z)\,,\ \eta - y = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}(\zeta - z);$$

und wenn man hier für $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ die vorherbestimmten Werthe setzt, so wird:

$$\left.\begin{aligned}\xi &= x + \frac{dx}{dz}(\zeta - z)\\ \eta &= y + \frac{dy}{dz}(\zeta - z),\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

oder, was das Nämliche ist:

$$\left.\begin{aligned}\xi &= x + \varphi'(z)\,(\zeta - z)\\ \eta &= y + \psi'(z)\,(\zeta - z)\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

und diess sind die Gleichungen der Tangente, weil man mittelst dieser Formeln ξ und η finden kann, sobald ζ willkührlich angenommen worden ist.

Legt man durch den Punkt P eine Ebene MN senkrecht auf der Tangente ST, so nennt man MN die Normalebene der Curve im Punkte (x, y, z). Ihre Gleichung findet sich auf folgende Weise.

Man denke sich von O ein Perpendikel p auf die Ebene MN herabgelassen und ausserdem nach einem beliebigen durch die Coordinaten ξ, η, ζ bestimmten Punkte derselben von O aus eine Gerade q gezogen, welche mit p den Winkel ω einschliessen möge. Es ist dann:

$$p = q \cos \omega,$$

heissen ferner α, β, γ die Winkel, welche p, und u, v, ω die, welche q mit den drei Coordinatenachsen macht, so ist nach einer bekannten Formel der analytischen Geometrie:

$$\cos \omega = \cos u \cos \alpha + \cos v \cos \beta + \cos \omega \cos \gamma,$$

folglich durch Multiptikation mit q:

$$p = (q \cos u) \cos \alpha + (q \cos v) \cos \beta + (q \cos \omega) \cos \gamma,$$

oder

$$p = \xi \cos \alpha + \eta \cos \beta + \zeta \cos \gamma. \tag{7}$$

Diese Gleichung, welche für irgend einen Punkt (ξ, η, ζ) der Normalebene besteht, muss aber auch für den ebenfalls in der Normalebene liegenden Punkt (x, y, z) gelten, so dass

$$p = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma$$

ist, woraus man durch Subtraktion von (7)

$$0 = (\xi - x) \cos \alpha + (\eta - y) \cos \beta + (\zeta - z) \cos \gamma$$

oder

$$\frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} (\xi - x) + \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} (\eta - y) + \zeta - z = 0$$

erhält. Berücksichtigt man, dass die hier betrachteten Winkel α, β, γ mit den in (3) und (4) vorkommenden identisch sind, so wird jetzt:

$$\frac{dx}{dz} (\xi - x) + \frac{dy}{dz} (\eta - y) + \zeta - z = 0 \tag{8}$$

oder

$$\varphi'(z)(\xi - x) + \psi'(z)(\eta - y) + \zeta - z = 0 \tag{9}$$

die Gleichung der Normalebene.

Um diess auf ein Beispiel anzuwenden, betrachten wir diejenige krumme Linie, welche den Durchschnitt einer Kugel und eines gleich-

seitigen hyperbolischen Paraboloids bildet. Nennen wir a den Halbmesser der ersteren und b die Seite des zweiten, so haben wir

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0\,,\; x^2 - y^2 - b^2 z = 0$$

für die Gleichungen der beiden genannten Flächen. Aus ihnen ergiebt sich

$$x = \sqrt{\frac{a^2 - z^2 + b^2 z}{2}} = \varphi(z),$$

$$y = \sqrt{\frac{a^2 - z^2 - b^2 z}{2}} = \psi(x);$$

und durch Differenziation:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{-2z + b^2}{\sqrt{a^2 - z^2 + b^2 z}} = \varphi'(z),$$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{-2z - b^2}{\sqrt{a^2 - z^2 - \beta^2 z}} = \psi'(z);$$

und nun kann man die Gleichungen der Tangente und Normalebene im Punkte (x, y, z) ohne Weiteres hinschreiben.

§. 60.

Die Tangentialebenen und Normalen der Flächen.

In der Gleichung einer Fläche $F(x, y, z) = 0$ sind bekanntlich zwei Coordinaten, etwa x und y, willkührlich, dagegen die dritte z eine Funktion der beiden anderen, welche man durch Auflösung jener Gleichung nach z erhält, wobei etwa $z = f(x, y)$ zum Vorschein kommen möge. Geben wir nun den Coordinaten x und y ein paar willkührliche Inkremente Δx und Δy, so nimmt auch z um eine gewisse Grösse Δz zu, welche von Δx und Δy auf bestimmte Weise abhängt. Um diess zu veranschaulichen, wenden wir uns an fig. 22., worin P ein beliebiger Punkt der gegebenen Fläche, $HA = x$, $KA = y$, $AP = z$ ist. Lassen wir x um die Strecke $AB = \Delta x$ zunehmen und von B eine Senkrechte aufsteigen, so stossen wir auf einen zweiten Punkt Q der Fläche, wobei wir $BQ = z + \left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right) \Delta x$ setzen wollen, um anzudeuten, dass die Differenz Δz, welche zwischen AP und BQ statt findet, von dem Zuwachs Δx herrührt. Geben wir ebenso dem y ein Inkrement $AC = \Delta y$ und ziehen wieder $CR \parallel OZ$, so erhalten wir eines dritten Punkt

R der gegebenen Fläche, für welchen $CR = z + \left(\frac{\Delta z}{\Delta y}\right)\Delta y$ sein möge, um anzudeuten, dass sich die jetzige Aenderung des z von Δy herschreibt. Es sind demnach

die Coordinaten von P: x , y , z ,

„ „ „ Q: $x + \Delta x$, y , $z + \left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)\Delta x$,

„ „ „ R: x , $y + \Delta y$, $z + \left(\frac{\Delta z}{\Delta y}\right)\Delta y$.

Durch die 3 Punkte P, Q, R wollen wir nun eine Ebene legen, deren Gleichung *)

$$A\xi + B\eta + \zeta + C = 0 \tag{1}$$

heissen möge, worin A , B , C erst noch zu bestimmen sind. Da P, Q , R in dieser Ebene liegen sollen, so müssen ihre Coordinaten die Gleichung derselben befriedigen, es muss also

$$Ax + By + z + C = 0,$$

$$A(x + \Delta x) + By + z + \left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)\Delta x + C = 0,$$

$$Ax + B(y + \Delta y) + z + \left(\frac{\Delta z}{\Delta y}\right)\Delta y + C = 0$$

sein und aus diesen Gleichungen lassen sich die Unbekannten A, B, C sehr leicht eliminiren. Durch Subtraktion der ersten Gleichung von der zweiten und dritten erhält man nämlich:

$$A\Delta x + \left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)\Delta x = 0 \text{ , } B\Delta y + \left(\frac{\Delta z}{\Delta y}\right)\Delta y = 0;$$

folglich

$$A = -\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right) \text{ , } B = -\left(\frac{\Delta z}{\Delta y}\right).$$

Man könnte nun auch C mittelst der ersten Gleichung bestimmen und dann Alles in no. (1) substituiren; man gelangt aber rascher zum Ziele,

*) Gewöhnlich stellt man die Gleichung der Ebene unter der Form

$$a\xi + b\eta + c\zeta + d = 0$$

dar; dividirt man dieselbe mit c und setzt $\frac{a}{c} = A$, $\frac{b}{c} = B$, $\frac{d}{c} = C$, so erhält man die oben benutzte Form. Auch ist leicht einzusehen, dass a , b , c , d nicht von einander unabhängig sind, während diess mit A , B , C statt findet.

wenn man von no. (1) die darauf folgende Gleichung subtrahirt; diess giebt

$$A(\xi-x)+B(\eta-y)+\zeta-z=0,$$

fotglich vermöge der Werthe von A und B:

$$\zeta-z=\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)(\xi-x)+\left(\frac{\Delta z}{\Delta y}\right)(\eta-y).$$

Lassen wir jetzt die willkührlichen Aenderungen Δx und Δy bis zur Gränze Null abnehmen, so rücken die drei Punkte P, Q, R immer näher an einander und die Kappe, welche die Ebene durch P, Q und R von der Fläche abschneidet, zieht sich zu einem blosen Punkte P zusammen; die schneidende Ebene wird zur Tangentialebene und die Differenzenquotienten $\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)$ und $\left(\frac{\Delta z}{\Delta y}\right)$ werden zu partiellen Differenzialquotienten, weil die Grösse Δz in $\left(\frac{\Delta z}{\Delta y}\right)$ nur von Δx und in $\left(\frac{\Delta z}{\Delta y}\right)$ nur von Δy abhängt. Wir erhalten demnach:

$$\zeta-x=\left(\frac{dz}{dx}\right)(\xi-x)+\left(\frac{dz}{dy}\right)(\eta-y), \tag{2}$$

oder auch in leicht verständlicher Bezeichnung:

$$\zeta-x=f'_x(x,y)(\xi-x)+f'_y(x,y)(\eta-y) \tag{3}$$

als Gleichung der Tangentialebene.

Es ist nun ebenso leicht, die Gleichungen der Normale im Punkte (x,y,z) aufzustellen. Dieselben seien:

$$\xi=A\zeta+a\ ,\ \eta=B\zeta+b\ ,$$

so müssen die Coordinaten x, y, z dieselben befriedigen, weil der Punkt P in der Normale selbst liegt. Es ist also zugleich

$$x=Az+a\ ,\ y=Bz+b;$$

folglich durch Subtraktion:

$$\xi-x=A(\zeta-z)\ ,\ \eta-y=B(\zeta-z);$$

und wenn wir α, β, γ die Winkel nennen, welche die Normale mit den Coordinatenachsen macht, so muss ganz so wie in §. 59.

$$\xi-x=\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}(\zeta-z),\ \eta-y=\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}(\zeta-z) \tag{4}$$

sein. Die Winkel α, β, γ finden sich auf folgende Weise. Heisst p das Perpendikel vom Anfangspunkte der Coordinaten auf die Tangentialebene, so sind die Winkel, welche dasselbc mit den Coordinatenachsen einschliesst, mit den Winkeln α, β, γ offenbar identisch, weil die Normale ebenfalls auf der Tangentialebene senkrecht steht. Demnach ist wie in §. 59.

$$\xi \cos\alpha + \eta \cos\beta + \zeta \cos\gamma = p$$

die Gleichung der auf p senkrechten Ebene d. h. der Tangentialebene. Diese Gleichung muss nun mit der bereits gefundenen in (2) identisch sein, höchstens könnte sie um einen constanten Faktor k davon differiren, so dass

$$k\cos\alpha = \left(\frac{dz}{dx}\right),\ k\cos\beta = \left(\frac{dz}{dy}\right),\ k\cos\gamma = -1$$

wäre. Hieraus findet man

$$k^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) = \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 1.$$

Es ist aber überhaupt immer

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

und demnach

$$k = \pm\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 1} \qquad (6)$$

und für den so bestimmten Werth von k ergeben sich aus no. (5) die Formeln:

$$\cos\alpha = \frac{1}{k}\left(\frac{dz}{dx}\right),\ \cos\beta = \frac{1}{k}\left(\frac{dz}{dy}\right), \cos\gamma = -\frac{1}{k}; \qquad (7)$$

mittelst deren die Gleichungen der Normale in no. (4) die einfachere Form annehmen:

$$\xi = x - \left(\frac{dz}{dx}\right)(\zeta - z),\ \eta = y - \left(\frac{dz}{dy}\right)(\zeta - z). \qquad (8)$$

Für das elliptische Paraboloid hat man z. B.

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

und hieraus findet man ohne Schwierigkeit

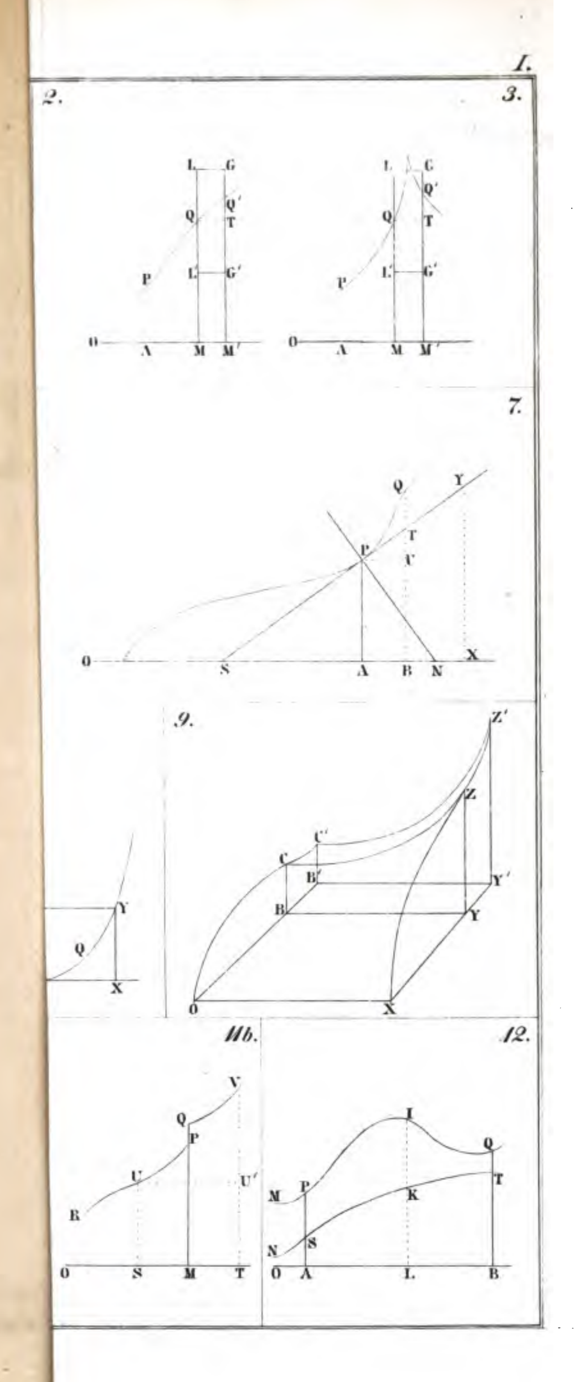
$$\zeta - z = \frac{2x}{a^2}(\xi - x) + \frac{2y}{b^2}(\eta - y)$$

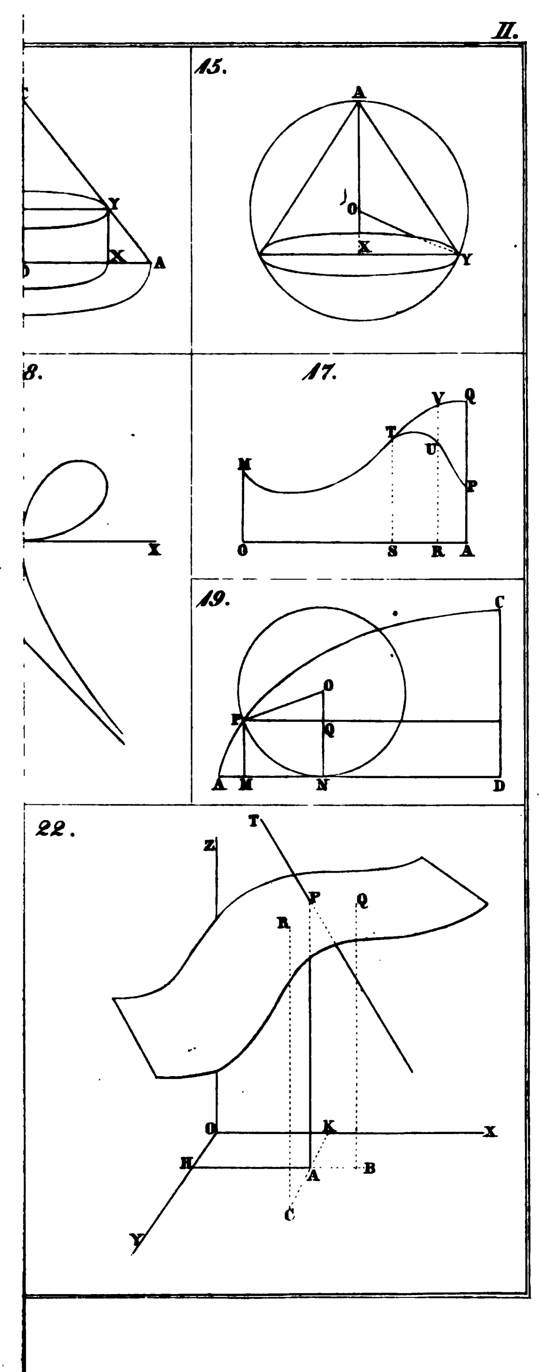
und

$$\xi = x - \frac{2x}{a^2}(\zeta - z), \quad \eta = y - \frac{2y}{b^2}(\zeta - z)$$

für die Gleichungen der Tangentialebene und Normale.

Greifswald, gedruckt bei F. W. Kunike.


I.
2.
3.
L
G
Q'
Q
T
P
L'
G'
O
A
M
M'
7.
Q
Y
T
P
U
O
S
A
B
N
X
9.
Z'
Z
C'
C
B'
Y'
B
Y
Q
X
O
11b.
V
Q
P
U
U'
R
O
S
M
T
12.
I
Q
M
P
K
T
N
S
O
A
L
B


II.
15.
A
O
X
Y
8.
X
17.
V
Q
T
U
M
P
O
S
R
A
19.
C
O
P
Q
A
M
N
D
22.
T
Z
P
Q
R
O
K
X
H
A
B
C
Y